MARIO LIVIO

Ecuația care n-a putut fi rezolvată

book HUMANITAS

MARIO LIVIO

MARIO LIVIO este astronom și fost șef al Departamentului de Știință de la Space Telescope Science Institute (STScI) – institutul care coordonează programul științific al Telescopului Spațial Hubble. A obținut doctoratul în astrofizică teoretică la Universitatea Tel Aviv din Israel și a fost profesor la Institutul de Tehnologie Technion – Israel începând din 1981 până în 1991, când s-a angajat la STScI. Dr. Livio a publicat peste 400 de articole științifice și a primit numeroase distincții, atât pentru cercetările făcute, cât și pentru capacitățile sale didactice deosebite. Este autorul cărții *Secțiunea de aur*, un titlu foarte bine primit de cititori, despre matematică și arte, pentru care i s-au decernat premiile Pythagoras și Pearo.

MARIO LIVIO

Ecuația care n-a putut fi rezolvată

Matematicieni de geniu descoperă limbajul simetriilor

Traducere din engleză de
MIHNEA MOROIANU

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Diana Constantinescu
Coperta: Ionuț Broștianu
Tehnoredactor: Luminița Simionescu
Corector: Maria Nicolau
DTP: Dumitru Olteanu

MARIO LIVIO
THE EQUATION THAT COULDN'T BE SOLVED
© 2005 by Mario Livio
Originally published by SIMON & SCHUSTER, Inc.
All rights reserved

© HUMANITAS, 2007 (ediția print)
© HUMANITAS, 2014 (ediția digitală)

ISBN 978-973-50-4633-0 (pdf)

EDITURA HUMANITAS
Piața Presei Libere 1, 013701 București, România
tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro
Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro
Comenzi telefonice: 0372.743.382; 0723.684.194

Pentru Sofie

1
Simetria

O pată de cerneală pe o foaie de hârtie nu este deosebit de atrăgătoare pentru ochi, dar dacă îndoiți hârtia înainte să se usuce cerneala, puteți obține o formă ca cea din figura 1, care ridică mai multe întrebări. Mai mult decât atât, interpretarea unor asemenea pete de cerneală stă la baza faimosului test Rorschach[1], elaborat în anii 1920 de către psihiatrul elvețian Hermann Rorschach. Scopul declarat al testului este să scoată cumva la suprafață temerile neștiute, fanteziile sălbatice și gândurile mai ascunse ale privitorilor care interpretează formele ambigue. Valoarea reală a testului, de „rază *X* a minții", este vehement dezbătută în cercurile psihologilor. După cum s-a exprimat cândva psihologul Scott Lilienfeld de la Emory University, „A cui minte, a clientului sau a examinatorului?" Cu toate acestea, este incontestabil că imagini precum cea din figura 1 produc un anumit gen de impresie, fascinantă și atrăgătoare. De ce?

Să fie oare datorată simetriei bilaterale a corpului uman, majorității animalelor și atâtor artefacturi realizate de om? Și, în primul rând, cum se face că toate aceste entități zoologice și creații ale imaginației umane prezintă o asemenea simetrie?

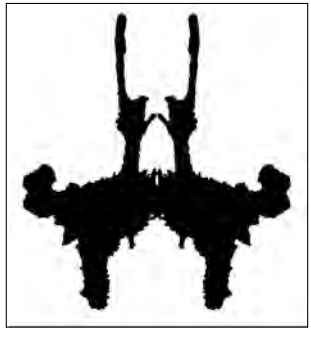


Figura 1

Cei mai mulți oameni percep compozițiile armonioase precum *Nașterea lui Venus* de Botticelli[2]

(figura 2) ca fiind simetrice. Istoricul de artă Ernst H. Gombrich observă chiar că „libertățile pe care Botticelli și le lua în raport cu natura pentru a obține o configurație grațioasă sporesc frumusețea și armonia desenului“. Totuși matematicienii vă vor spune că aranjamentele de culori și forme din acest tablou nu sunt câtuși de puțin simetrice în sens matematic. Dimpotrivă, cei mai mulți privitori ne-matematicieni nu percep modelul din figura 3 ca fiind simetric, deși el este în fapt simetric conform cu definiția matematică exactă. Așadar, ce este simetria? Joacă ea vreun rol în percepție, și care anume? Cum este legată de sensibilitatea noastră estetică? Și cum se face că în domeniul științific simetria a devenit un concept crucial, ce stă la baza viziunii noastre asupra lumii înconjurătoare și a teoriilor fundamentale care încearcă s-o explice? Dat fiind că simetria penetrează un atât de larg evantai de discipline, ce „limbaj“ și „gramatică“ folosim pentru a caracteriza simetriile și atributele lor, și cum a fost inventat limbajul acesta universal? Sau într-o formulare mai simplistă, poate furniza simetria un răspuns la întrebarea decisivă pusă prin titlul unuia din cântecele starului rock Rod Stewart – „Îți par cumva sexy?“

Voi încerca să dau măcar răspunsuri parțiale la toate aceste întrebări și la multe altele. Și sper că povestea, per ansamblu,

Figura 2

va zugrăvi atât latura umanistă a matematicii, cât și, ceea ce e mai important, latura umană a matematicienilor. După cum vom vedea, simetria este principalul instrument pentru aruncarea de punți peste prăpastia dintre știință și artă, dintre psihologie și matematică. Ea își manifestă prezența în obiecte și concepte, mergând de la covoarele persane până la moleculele vieții, de la Capela Sixtină până la mult căutata „Teorie a tot ce există". Cu toate acestea, teoria grupurilor, limbajul matematic care descrie esența simetriilor și explorează proprietățile lor, n-a rezultat nicidecum din studiul acestora. Ea reprezintă o uimitoare idee unificatoare a gândirii moderne, provenită dintr-o sursă neașteptată – o ecuație care n-a putut fi rezolvată. Povestea dramatică și întortocheată a acestei ecuații constituie un segment esențial din saga noastră intelectuală. În același timp, povestea aceasta aruncă o lumină asupra singurătății geniului și a tenacității intelectului uman în fața provocărilor aparent insurmontabile. Am depus un efort extraordinar pentru a încerca să rezolv misterul vechi de două sute de ani al morții protagonistului acestei povești – strălucitul matematician Évariste Galois. Cred că m-am apropiat de adevăr mai mult decât a fost până acum cu putință.

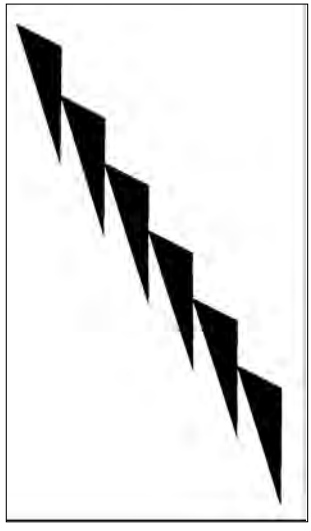


Figura 3

Spiritualul dramaturg George Bernard Shaw a spus cândva: „Omul rațional se adaptează pe sine la lume; cel nerațional persistă în încercarea de a adapta lumea la el. De aceea, orice progres depinde de omul nerațional." În această carte vom întâlni multe persoane nerezonabile, de ambele sexe. Procesul creator, prin însăși natura lui, caută terenuri intelectuale și emoționale încă neexplorate. Mici excursuri în abstracția matematică

ne vor oferi posibilitatea de a arunca priviri în însăși natura creativității. Încep cu o concisă explorare a miraculosului domeniu al simetriei.

Imunitate față de schimbări

Cuvântul *simetrie* are rădăcini antice[3], provenind din termenii greceşti *sym* și *metria*, care se traduc prin „aceeași măsură". Atunci când grecii puneau asupra unei opere de artă sau a unui plan arhitectural eticheta de „simetric", ei înțelegeau că în lucrare putea fi identificată o mică porțiune care să fie cuprinsă în dimensiunile tuturor celorlalte părți de un număr precis de ori (părțile erau „comensurabile"). Această definiție timpurie corespunde mai degrabă noțiunii noastre moderne de proporție, decât celei de simetrie. Cu toate acestea, marii filozofi Platon (428/427–348/347 î.Cr.) și Aristotel (384–322 î.Cr.) n-au ezitat să asocieze simetria cu frumusețea. Conform lui Aristotel, „principalele forme ale frumuseții sunt așezarea ordonată (în greceşte *táxis*), proporția (*symmetria*) și determinarea (*horismenon*), care sunt dezvăluite îndeosebi de matematică". Mergând pe urmele grecilor, identificarea simetriei cu „justa proporție" a fost ulterior răspândită de influentul arhitect roman Vitruviu[4] (cca 70–25 î.Cr.), și ea s-a menținut în întreaga perioadă a Renașterii. În lucrarea sa *De Architectura Libri Decem* (*Zece cărți despre arhitectură*), o adevărată Biblie arhitecturală a Europei vreme de secole, Vitruviu scrie:

> Planul unui templu depinde de simetrie, ale cărei principii trebuie respectate cu grijă de către arhitect. Ele se datorează proporției. Proporția este o corespondență între măsurile elementelor unei întregi opere, și între întreg în raport cu o anumită parte selectată drept standard. De aici rezultă principiile simetriei.

În sens matematic precis, semnificația modernă a simetriei[5] (dată pentru prima dată la sfârșitul secolului al XVIII-lea) este efectiv de „imunitate față de o schimbare posibilă". Sau, după

cum s-a exprimat cândva matematicianul Hermann Weyl (1885–1955), „un lucru este simetric dacă acționând asupra lui, după ce ți-ai terminat treaba, el arată la fel ca înainte“. Să examinăm de pildă versurile[6]:

E ciudat ce asimetrică
E „simetria“?
„Simetria“ e asimetrică.
Ce ciudat e.

Această strofă rămâne neschimbată dacă e citită cuvânt cu cuvânt de la sfârșit spre început – este simetrică în raport cu citirea inversată. Dacă vă imaginați că aceste cuvinte ar fi aranjate precum niște mărgele pe un fir, ați putea privi (figurat vorbind) această citire inversată ca fiind un fel de reflectare în oglindă a strofei. Strofa nu se schimbă atunci când e reflectată în oglindă în sensul sus-pomenit – ea este simetrică în cazul unei astfel de reflecții în oglindă. Pe de altă parte, dacă preferați să considerați că ați citi poemul cu voce tare, atunci citirea de la sfârșit spre început corespunde unei întoarceri în timp, ceva în genul unei derulări în sens invers a unei videocasete (din nou, nu în sens literal, deoarece sunetele individuale nu sunt inversate). Grupurile de cuvinte cu această proprietate se numesc *palindromuri*[7].

Inventarea palindromurilor este atribuită în genere lui Sotades cel Obscen din Maronea, care a trăit în secolul al III-lea î.Cr. în Egipt, dominat pe atunci de greci. Palindromurile au fost extrem de populare printre mulți renumiți amatori de jocuri de cuvinte, precum englezul J.A. Lindon și minunatul autor de probleme matematice recreative, Martin Gardner. Unul dintre amuzantele palindromuri ale lui Lindon, având cuvântul drept unitate, sună așa: „Girl, bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl.“* Alte palindromuri sunt simetrice la citirea literă cu literă de

* „Fată, îmbăiată pe bikini, observând băiatul, descoperă băiatul observând bikini pe îmbăiată fată“ (*n. r.*).

la sfârșit la început – „Able was I ere I saw Elba“*[8] (atribuit în glumă lui Napoleon) sau titlul unui faimos program NOVA: „A man, a Plan, a Canal, Panama“**.

În mod surprinzător, palindromurile nu apar doar în jocuri ingenioase de cuvinte, ci și în structura cromozomului masculin Y[9], a cărui descriere genetică completă a fost obținută abia în 2003. Această realizare a încununat un efort eroic și a dezvăluit că puterile de autoconservare ale acestui cromozom sexual au fost grosolan subestimate. Alte perechi de cromozomi umani luptă împotriva mutațiilor dăunătoare făcând schimb de gene. Deoarece cromozomul Y este lipsit de partener, biologii estimaseră anterior că încărcătura lui genetică riscă să se epuizeze în nu mai mult de cinci milioane de ani. Spre uimirea lor, cercetătorii echipei de studiere a cromozomului Y au descoperit că el luptă împotriva pieirii prin palindromuri. În jur de șase milioane din cele cincizeci de milioane de „litere“ ADN ale sale formează secvențe palindromice – secvențe care se citesc în același fel înainte și înapoi pe cele două catene ale elicei duble. Acestea nu numai că facilitează revenirile în cazul unor mutații nefavorabile, dar ele îi permit cromozomului, într-o anumită măsură, să se împerecheze cu el însuși – catenele își pot schimba pozițiile, iar genele se amestecă. După formularea șefului echipei de la Massachusetts Institute of Technology, David Page, „cromozomul Y este o sală a oglinzilor“.

Bineînțeles, cel mai familiar exemplu de simetrie în oglindă este cel al simetriei bilaterale, care caracterizează regnul animal[10]. De la fluturi la balene și de la păsări la oameni, dacă reflectezi jumătatea stângă într-o oglindă, obții ceva aproape identic cu jumătatea dreaptă. Voi ignora pentru moment micile, foarte greu observabilele diferențe externe care există, precum și faptul că nici anatomia internă, nici funcțiile creierului nu posedă simetrie bilaterală.

---

* „Capabil am fost înainte de a vedea Elba.“ În limba română nu este palindrom (*n. r.*).

** „Un bărbat, un plan, un canal, Panama.“ În limba română nu este palindrom (*n. r.*).

Pentru mulți oameni, cuvântul *simetrie* înseamnă simetrie bilaterală. Chiar și în *Webster's Third New International Dictionary*, una dintre definiții sună așa: „Corespondență în mărime, formă și poziție relativă a elementelor care sunt de părți opuse ale unei linii despărțitoare sau ale unui plan median." Descrierea matematică precisă a simetriei de reflectare folosește același concept. Luați desenul unui fluture bilateral simetric și trasați o linie dreaptă pe mijlocul lui. Dacă îndoiți desenul de-a lungul liniei centrale, se va produce o suprapunere perfectă. Fluturele rămâne neschimbat – invariant – la o reflexie făcută în raport cu linia sa centrală.

Simetria bilaterală este atât de răspândită la animale, încât e greu să fie considerată întâmplătoare. În fapt, considerând că un organism este o imensă mulțime de trilioane și trilioane de molecule, modalitățile de a construi, pornind de la aceste blocuri elementare, configurațiile asimetrice sunt infinit mai numeroase decât cele simetrice. Cioburile unui vas spart pot zăcea grămadă în multe moduri diferite, dar reunirea lor, pentru reconstituirea vasului intact (și de obicei bilateral simetric) se poate face într-un singur mod. Și totuși rămășițele fosile din Ediacara Hills, Australia, arată că organisme cu corp moale (*Spriggina*) datând din diviziunea Vendian a Precambrianului protozoic (cu 650 până la 543 de milioane de ani în urmă) prezentau deja o simetrie bilaterală.

Dat fiind că formele de viață de pe pământ au fost modelate în ere întregi de evoluție și selecție naturală, aceste procese trebuie să fi preferat cumva simetria bilaterală sau în oglindă. Dintre toate formele diferite pe care ființele ar fi putut să le ia, cele bilateral simetrice au ieșit preponderente. Concluzia inevitabilă este că această simetrie a fost rezultatul probabil al creșterii biologice. Putem oare înțelege cauza unei astfel de predilecții? Am putea cel puțin încerca să-i găsim una dintre rădăcini, în legile mecanicii. Dacă pornim de aici, observația de bază este că diferitele direcții în care ne mișcăm nu sunt echivalente între ele. O distincție clară între sus și jos (*dorsal* și *ventral* la animale, în limbaj biologic) este făcută de gravitația terestră. În majoritatea cazurilor, ceea ce urcă trebuie să coboare,

dar nu și invers. O altă deosebire, între față și spate, este rezultatul funcției de locomoție.

Orice ființă care se mișcă relativ iute – în mare, pe uscat sau în aer – are un avantaj clar dacă extremitatea ei frontală este diferită de cea dorsală. Dispunerea în față a tuturor organelor senzoriale – principalii detectori de lumină, sunet, miros și gust – o ajută evident pe respectiva ființă să decidă unde să se ducă și cum să ajungă mai repede acolo. Un „radar" frontal oferă de asemenea o avertizare timpurie asupra pericolelor potențiale. Gura poziționată în față poate face toată diferența între a prânzi cel dintâi sau nu. În același timp, mecanica efectivă a mișcării (în special pe uscat și în aer) sub influența forței gravitaționale a dus la stabilirea unei deosebiri clare între noțiunile de jos și sus. De îndată ce viața s-a răspândit din mare pe uscat, a fost necesară dezvoltarea unui gen de dispozitive mecanice – picioarele –, destinate deplasării animalului. Asemenea părți organice secundare nu erau necesare în aer, așa încât deosebirea între sus și jos a devenit și mai pronunțată. Aerodinamica zborului (tot sub influența gravitației terestre) s-a combinat cu necesitatea dezvoltării unui aparat de aterizare și a unor mijloace de deplasare pe pământ pentru a produce la păsări diferența între sus și jos.

Aici trebuie să facem însă o constatare importantă: *În apă, pe uscat sau în aer nu există nici un criteriu de bază prin care să se facă deosebirea între stânga și dreapta.* Șoimul, privind spre dreapta, vede aproape același mediu înconjurător ca atunci când privește spre stânga. Lucru care nu este adevărat pentru sus și jos – sus este direcția în care șoimul se ridică spre cer, în vreme ce jos este cea în care coboară pe pământ și-și construiește cuibul. Lăsând la o parte clișeele politice, pe pământ nu există mari deosebiri între stânga și dreapta, fiindcă nu există forțe orizontale puternice. Desigur, rotația planetei în jurul axei sale și câmpul magnetic terestru (faptul că Pământul acționează asupra vecinătăților sale ca o bară magnetică) creează o asimetrie. Dar acest efect nu este nici pe departe atât de semnificativ la nivel macroscopic ca cele ale gravitației și ale mișcării rapide a ființelor.

Explicațiile de până acum spun de ce simetria bilaterală a organismelor vii are sens din punct de vedere mecanic. Totodată, ea este și economică – obțineți două organe la preț de unu. Cum a rezultat simetria sau lipsa de simetrie din biologia evoluționistă (gene) sau, mai de departe, din legile fizicii este o întrebare dificilă, asupra căreia voi reveni în capitolele 7 și 8. Aici nu voi mai spune decât că multe ființe multicelulare au inițial embrionul lipsit de simetrie bilaterală. Forța motrice care determină modificarea „planului original" pe măsura creșterii embrionului pare să fie într-adevăr capacitatea de mișcare.

Nu întreaga natură însuflețită trăiește sub semnul vitezei. Formele de viață ancorate într-un anumit loc și incapabile să se miște în mod voluntar, cum sunt plantele și celenteratele fixate pe stânci, au zonele inferioare foarte diferite de cele superioare, dar nu și spate diferit de față sau o porțiune stângă diferită de cea dreaptă. Ele au o simetrie asemănătoare cu cea unui con – produc reflexii simetrice în orice oglindă poziționată pe axa lor verticală, centrală. Anumite ființe care se mișcă foarte încet, cum este meduza, au o simetrie asemănătoare.

Evident, odată ce s-a dezvoltat simetria bilaterală în structura organismelor vii, existau toate motivele ca ființele s-o păstreze intactă. Orice pierdere a unei urechi sau a unui ochi l-ar face pe un animal mult mai vulnerabil față de un prădător ce se strecoară pentru a-l ataca pe neobservate.

Ne-am putea întreba oricând dacă înfățișarea obișnuită cu care natura i-a înzestrat pe oameni este cea optimă. Ianus, de pildă, era zeul roman al porților și noilor începuturi, inclusiv al primei luni (ianuarie) a anului. De aceea, el este totdeauna reprezentat în artă cu două fețe, una ce privește înainte (în mod simbolic, spre anul următor), alta în spatele capului (privind spre anul care a trecut). Un asemenea aranjament la oameni, deși util pentru anumite scopuri, n-ar fi lăsat loc părților din creier responsabile cu sistemele nesenzoriale. În minunata sa carte *Noul Univers Ambidextru,* Martin Gardner povestește despre un umorist din Chicago[11] care obișnuia să discute despre avantajele de a avea diverse organe senzoriale în cele mai neobișnuite locuri ale corpului. Urechile la subsuori, de pildă, ar fi

ținute la cald în iernile reci din Chicago. Dar evident, o asemenea alcătuire organică ar avea și dezavantaje. Auzul urechilor de la subsuori ar fi serios diminuat dacă brațele n-ar fi ținute tot timpul ridicate.

Filmele SF prezintă invariabil extratereștri care sunt bilateral simetrici. Dacă există creaturi extraterestre inteligente care au evoluat biologic, cât de mare e probabilitatea ca ele să posede simetrie de reflecție? Destul de mare. Dată fiind universalitatea legilor fizicii, în particular a legilor gravitației și mișcării, formele de viață de pe planetele din afara Sistemului Solar sunt confruntate cu aceleași provocări ambientale ca și viața de pe Pământ. Și acolo, forța gravitațională reține orice lucru pe suprafața planetei și creează o diferențiere clară între sus și jos. Locomoția deosebește și ea partea frontală de cea dorsală. E.T. este sau era cel mai probabil ambidextru. Aceasta nu înseamnă însă că orice delegație de extratereștri care ne vizitează ar trebui să ne semene. Este foarte probabil ca orice civilizație suficient de evoluată pentru a se angaja în călătorii interstelare să fi ajuns de mult la nivelul unei specii inteligente, cu creaturi ultratehnologizate. O superinteligență computerizată[12] este cel mai probabil să fie de dimensiuni microscopice.

Unele dintre majusculele alfabetului fac parte dintre numeroasele creații umane simetrice la reflexia în oglindă. Dacă țineți în fața unei oglinzi o foaie de hârtie cu literele A, Ă, H, I, Î, M, O, T, U, V, W, X, Y, imaginea lor reflectată arată la fel. Cuvinte (sau chiar fraze întregi) construite cu aceste litere tipărite pe verticală, precum ar fi anunțul:

T
I
M
O
T
H
Y

M
Ă

V
O
I

M
U
T
A

rămân neschimbate la o reflexie în oglindă. Grupul suedez de muzică pop A$^{\text{Ч}}$BA, a cărui muzică a inspirat *musical*-ul de succes *Mamma Mia*, a introdus în scrierea numelui său un truc care-l face simetric în oglindă (MAMMA MIA, scris pe verticală, este de asemenea simetric în oglindă). Unele litere, precum B, C, D, E, H, I, K, O, X, sunt simetrice la reflexia într-o oglindă care le secționează orizontal. Cuvintele compuse din aceste litere, cum sunt DOC, BOX, CODEX, sau simbolul familiar pentru îmbrățișări și săruturi, XOXO, rămân neschimbate dacă sunt reflectate într-o astfel de oglindă.

Importanța simetriei de reflexie pentru percepția și aprecierea noastră estetică, pentru teoria matematică a simetriilor, pentru legile fizicii și pentru știință în genere nu poate fi supraestimată. Voi reveni de mai multe ori asupra ei, însă există și alte simetrii, la fel de relevante.

Structura poznașă a zăpezii

Titlul acestui subcapitol este preluat dintr-o creație a poetului și eseistului american Ralph Waldo Emerson (1803–1882): „The snowstorm".[13] El exprimă uimirea pe care-o simțim în fața formelor impresionante ale fulgilor de zăpadă (figura 4). Deși vorba „doi fulgi de zăpadă nu sunt niciodată la fel" nu este în fapt adevărată dacă-i privim cu ochiul liber, fulgii de zăpadă formați în ambienturi diferite sunt efectiv diferiți între ei. Faimosul astronom Johannes Kepler[14] (1571–1630), descoperitorul legilor mișcării planetare, a fost atât de impresionat de

splendoarea acestora, încât a dedicat un întreg tratat, *Fulgul de zăpadă cu șase colțuri,* încercării de a explica simetria lor. Pe lângă simetria de reflexie, fulgii de zăpadă posedă o *simetrie de rotație*[15] – pot fi rotiți cu anumite unghiuri în jurul unei axe perpendiculare pe planul lor (trecând prin centru) și rămân la fel. Datorită proprietăților și formei moleculei de apă, fulgii de zăpadă au de regulă șase colțuri (aproape) identice. Ca urmare, cel mai mic unghi de rotație (diferit de zero) pentru care configurația rămâne neschimbată se obține prin deplasarea fiecărui colț cu un „pas": 360°/6 = 60°. Celelalte unghiuri care conduc la obținerea aceleiași figuri finale sunt pur și simplu multipli ai acestui unghi: 120°, 180°, 240°, 300°, 360° (cel din urmă readuce fulgul în poziția inițială și este echivalent cu nerotirea lui). Fulgii de zăpadă au deci o hexasimetrie de rotație. Prin comparație, stelele-de-mare au o pentasimetrie de rotație; ele pot fi rotite cu 72°, 144°, 216°, 288° și 360° fără a rezulta vreo deosebire sesizabilă. Multe flori, precum crizantema, margareta și floarea-soarelui prezintă o simetrie de rotație aproximativă. Ele arată practic la fel cu orice unghi ar fi rotite (figura 5). Simetria, combinată cu bogăția culorilor și mirosurile amețitoare, este o proprietate subiacentă care le dă florilor puterea lor universală de fascinație. Nimeni n-a exprimat poate mai bine raportul asociativ dintre flori și opere de artă decât pictorul James McNeill Whistler[16] (1834–1903):

Figura 4

> Capodopera ar trebui să-i pară pictorului precum o floare – perfectă și în stadiul de îmbobocire, și în cel de înflorire; fără nici o rațiune care să-i explice existența, fără nici o misiune de îndeplinit; o bucurie pentru artist, o dezamăgire pentru filantrop, o enigmă pentru botanist; un accident al sentimentului și o aliterație pentru literat.

Ce anume are în el un model simetric pentru a putea provoca o asemenea reacție emoțională? O fi această reacție pe măsura celei produse de operele de artă? De observat că, chiar dacă răspunsul la ultima întrebare este un „da" fără echivoc, acesta nu ne apropie cu nimic de răspunsul la cea dintâi. Răspunsul la întrebarea „Ce au operele de artă de provoacă o reacție emoțională?" este departe de a fi clar. Într-adevăr, care e calitatea pe care-o împărtășesc capodopere atât de diferite precum *Fata cu cercel de perlă* a lui Jan Vermeer, *Guernica* lui Pablo Picasso și *Diptic cu Marilyn* al lui Andy Warhol? Clive Bell[17] (1881–1964), critic de artă și membru al Grupului de la Bloomsbury (care, fiindcă veni vorba, o includea și pe romanciera Virginia Woolf), a sugerat că această calitate, comună tuturor adevăratelor opere de artă, ar fi „forma semnificativă". Prin asta, el înțelegea o combinație particulară de linii, culori, forme și proporții care ne stârnesc emoțiile. Dar de aici nu rezultă că toate operele artă stârnesc aceeași emoție. Dimpotrivă: fiecare poate stârni o emoție complet diferită. Trăsătura lor comună constă în faptul că oricare dintre ele ne impresionează într-un fel sau altul. Dacă ar fi să admitem teoriile esteticii, atunci simetria ar putea reprezenta una dintre componentele (destul de vag definite) ale formei semnificative. În acest caz, reacția noastră la modelele simetrice s-ar putea să se integreze (chiar dacă este, poate, mai puțin intensă) în sensibilitatea noastră estetică generală. Nu toți sunt de acord cu această afirmație. Teoreticianul estetician Harold Osborne[18] spunea următoarele despre reacția umană la simetria unor elemente sau obiecte individuale, cum ar fi fulgii de zăpadă: „Ele pot trezi interes, curiozitate și admirație. Dar interesul vizual față de ele are o viață scurtă și este unul superficial: comparativ cu impactul unei capodopere artistice, atenția perceptivă slăbește curând, nu ajunge niciodată în profunzime.

Figura 5

Capacitatea de percepție nu este mărită.“ În fapt, așa cum voi arăta în capitolul următor și în capitolul 8, simetria are legătură strânsă cu percepția. Pentru moment, hai să ne concentrăm asupra „valorii“ pur estetice a simetriei.

Psihologii Peter G. Szilagyi și John C. Baird[19] de la Dartmouth College au făcut în 1977 un experiment fascinant menit să analizeze raportul cantitativ dintre simetriile incluse într-o configurație și preferințele estetice. Douăzeci de studenți din primii ani de studiu (subiecții cei mai obișnuiți ai experimentelor psihologice) au fost supuși la trei teste simple. Cel dintâi le cerea să aranjeze opt pătrate cu câte un punct negru în centrul lor pe o riglă formată din optsprezece celule, fiecare de mărime egală cu cea a pătratelor (figura 6a). Subiecții au fost instruiți să aranjeze piesele într-o manieră care să li se pară „vizual plăcută“. Fiecare pătrat trebuia să acopere în întregime o celulă, și trebuiau folosite toate pătratele. Al doilea și al treilea test erau similare. Al doilea le cerea să aranjeze unsprezece piese pe o tablă de 5×5 celule (figura 6b). În cazul celui de-al treilea, douăsprezece cuburi trebuiau potrivite în adânciturile unei structuri transparente tridimensionale, constând din trei suprafețe plane orizontale, fiecare având câte nouă adâncituri pătrate (figura 6c). Rezultatele au arătat o clară preferință estetică pentru configurații simetrice. De exemplu, 65 la sută dintre subiecți au obținut la primul test simetrii de reflexie perfecte. În fapt, simetria a fost criteriul de bază în lucrările celor mai mulți studenți (în una, două și trei dimensiuni), simetria perfectă fiind condiția cea mai căutată.

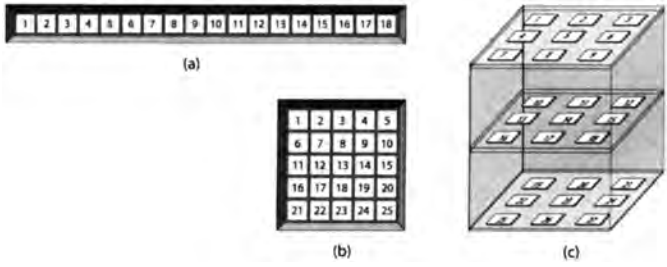


Figura 6 (a), (b), (c)

Asocierea dintre simetrie și gustul artistic nu s-a făcut numai în experimente, ci a apărut și într-o teorie estetică mai speculativă, dezvoltată de faimosul matematician George David Birkhoff[20] (1884–1944) de la Harvard. Birkhoff este cunoscut în special pentru faptul de a fi demonstrat în 1913 o faimoasă conjectură geometrică formulată de matematicianul francez Henri Poincaré și pentru teorema lui ergodică (publicată în 1931–32) – o contribuție de importanță fundamentală pentru teoriile gazelor și probabilităților. Pe vremea când era student în primii ani, Birkhoff a început să-și pună întrebări asupra structurii muzicii, iar aproximativ prin 1924 și-a extins interesul asupra esteticii în general. O jumătate din anul 1928 și l-a petrecut făcând o lungă călătorie prin Europa și Orientul Îndepărtat, în încercarea de a asimila cât mai multe cunoștințe despre artă, muzică și poezie. Eforturile sale pentru a dezvolta o teorie matematică a valorii estetice au culminat prin publicarea, în 1933, a lucrării *Măsura Estetică*[21]. Birkhoff a analizat în special percepția intuitivă a valorii unei opere de artă, care poate fi „diferențiată clar de percepțiile senzorială, emoțională, morală sau intelectuală". El împarte experiența estetică în trei faze: (1) efortul de atenție necesar pentru percepție; (2) realizarea faptului că obiectul este caracterizat de o anumită ordine; (3) aprecierea valorii, care recompensează efortul mintal. Birkhoff atribuie mai departe mărimi cantitative celor trei faze. Efortul preliminar, sugerează el, crește proporțional cu complexitatea operei (notată cu *C*). Simetriile joacă un rol-cheie în ordinea (notată *O*) ce caracterizează obiectul. Și, în final, percepția valorii este ceea ce Birkhoff numește „măsura estetică" (notată *M*) a operei de artă.

Esența teoriei lui Birkhoff poate fi rezumată astfel: în interiorul fiecărei clase de elemente estetice, precum ornamentele, vasele, ariile muzicale sau poezia, se poate defini o ordine *O* și o complexitate *C*. Măsura estetică a fiecărui element al clasei poate fi calculată prin simpla împărțire a lui *O* la *C*. Cu alte cuvinte, Birkhoff a propus o formulă pentru percepția valorii estetice: $M = O : C$. Sensul acestei formule este următorul: pentru un anumit grad de complexitate, măsura estetică este cu

atât mai mare cu cât este mai mare ordinea din cadrul elementului. Sau dacă ordinea este specificată, măsura estetică este cu atât mai mare cu cât elementul este mai puțin complex. Dat fiind că pentru majoritatea scopurilor practice ordinea este determinată în primul rând de simetriile elementului, teoria lui Birkhoff proclamă simetria drept un element estetic crucial.

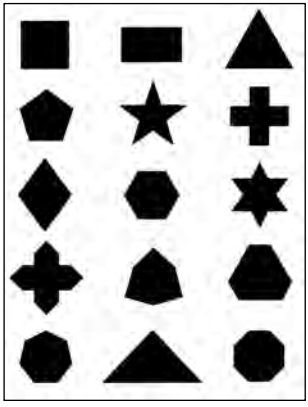


Figura 7

Birkhoff a fost primul care a admis că definițiile precise ale mărimilor sale *O*, *C* și *M* erau pline de capcane. Cu toate acestea, el a făcut curajoasa încercare de a descoperi legi detaliate pentru calculul lor, în cazul mai multor forme de artă. Mai exact, a început cu forme geometrice simple ca cele din figura 7, a continuat cu ornamente și vase chinezești, a ajuns la armoniile din gama diatonică și a încheiat cu creațiile lirice ale lui Tennyson, Shakespeare și Amy Lowell.

Nimeni, și Birkhoff mai puțin decât oricine, n-ar afirma că meandrele plăcerii estetice ar putea fi complet reduse la o simplă formulă. Cu toate acestea, Birkhoff a spus că: „În inevitabilul acompaniament analitic al procesului creator, teoria măsurii estetice este capabilă să aducă un dublu serviciu: ea furnizează o dare de seamă simplă și unificată asupra experienței estetice și asigură mijloace pentru analiza sistematică a unor domenii artistice reprezentative."

Întorcându-ne acum, după acest scurt ocol pe tărâmul esteticii, la cazul simetriei de rotație, observăm că una dintre cele mai simple figuri plane rotațional simetrice este cercul (figura 8a). Dacă-l rotiți în jurul centrului cu, să spunem 37°, el rămâne neschimbat. De fapt, îl puteți roti cu *orice* unghi în jurul unei axe perpendiculare ce trece prin centrul lui, fără să observați vreo diferență. Cercul are, de aceea, o infinitate de simetrii de rotație. Dar acestea nu sunt singurele simetrii ale cercului. El

rămâne neschimbat și la orice reflexie față de o axă trasată de-a lungul unui diametru (figura 8b).

Același sistem poate avea deci mai multe tipuri de simetrii, sau poate fi simetric atunci când este supus unei varietăți de *transformări de simetrie.* Rotația unei sfere perfecte în jurul centrului ei, indiferent care ar fi direcția axei luate în considerare, o face să arate exact la fel. Sau priviți de pildă triunghiul echilateral (cu toate laturile egale) din figura 9a.

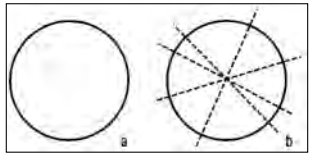


Figura 8

Nu avem voie nici să schimbăm forma sau mărimea acestui triunghi, nici să-l translatăm. Ce transformări i-am putea aplica pentru a-l lăsa neschimbat? L-am putea roti cu 120°, 240° sau 360° în jurul unei axe perpendiculare pe planul figurii, ce trece prin punctul *O* (figura 9b). Aceste transformări schimbă între ele locațiile vârfurilor, dar dacă stați cu spatele în vreme ce cineva îi aplică astfel de rotații, nu veți observa nici o diferență. De notat că o rotație de 360° este echivalentă cu a nu face nimic, sau cu a-l roti cu zero grade. Aceasta e cunoscută sub denumirea de *transformare identică*. De ce ne mai complicăm cu definirea unei astfel de transformări? Așa cum vom vedea mai departe în carte, transformarea identică joacă un rol similar cu cel al numărului zero în operația aritmetică de adunare sau cu cel al numărului unu la înmulțire – atunci când adăugați zero la un număr sau înmulțiți un număr cu unu, numărul rămâne neschimbat. Putem, de asemenea, reflecta în oglindă triunghiul în raport cu dreptele punctate din figura 9c. Există așadar exact șase transformări de simetrie – trei rotații și trei reflexii – asociate triunghiului echilateral.

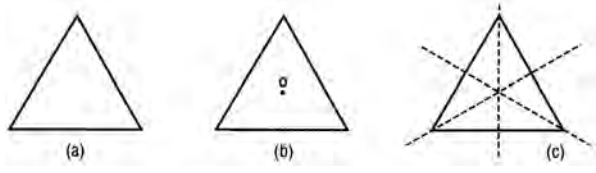


Figura 9 (a), (b), (c)

Dar ce putem spune despre combinațiile unor asemenea transformări, cum ar fi o reflexie urmată de o rotație? N-or duce ele la creșterea numărului simetriilor triunghiului? Voi reveni la această întrebare când vom discuta despre limbajul simetriilor. Pentru moment însă, avem de expus o altă simetrie importantă.

Morris, Mozart și compania

Unul dintre cele mai obișnuite modele simetrice este motivul repetat, recurent. De la frizele templelor clasice și coloanele palatelor, până la covoare și chiar la cântecul păsărilor, simetria motivelor repetate a produs dintotdeauna o foarte reconfortantă senzație de familiaritate și un efect liniștitor. Un exemplu elementar de simetrie de acest tip a fost prezentat în figura 3.

Transformarea de simetrie din acest caz se numește *translație*, ea însemnând o deplasare sau mutare cu o anumită distanță de-a lungul unei anumite drepte. Modelul este simetric dacă poate fi deplasat în diverse direcții fără a-și schimba aspectul. Cu alte cuvinte, configurațiile regulate obținute prin repetarea la intervale fixe a aceluiași motiv posedă o simetrie de translație. Încă din anul 17000 î.Cr. (era paleolitică) au fost create ornamente simetrice, obținute prin translații. O brățară din fildeș de mamut[22] găsită în Ucraina are un model care se repetă în zigzag. Alte configurații cu simetrie de translație se întâlnesc în diverse forme de artă, pornind de la mozaicul islamic medieval al palatului Alhambra din Granada, Spania (figura 10a), trecând prin tipografia Renașterii și ajungând la desenele fantasticului grafician[23] olandez M.C. Esher (1898–1972; figura 10b). Natura furnizează și ea exemple de creaturi cu simetrie de translație, cum sunt miriapozii, la care segmente identice ale corpului se pot repeta de până la 170 de ori.

Artistul, poetul și scriitorul victorian William Morris[24] (1834–1896) a fost un prolific producător de artă decorativă. O mare parte din opera lui este literalmente o întrupare a simetriei de translație. De timpuriu, Morris a fost fascinat de arhitectura medievală, iar la 27 de ani a înființat o firmă de

a

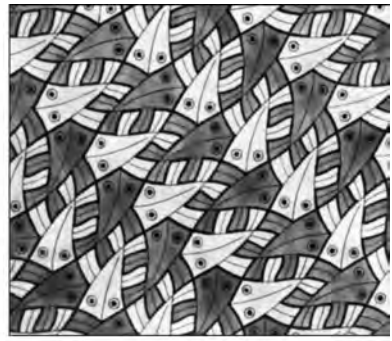
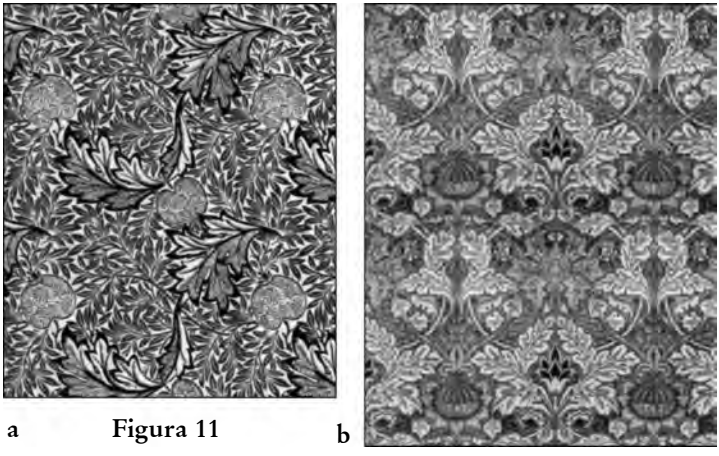


Figura 10 b

decorațiuni care a devenit faimoasă mai târziu, sub numele de Morris and Company. Ca o reacție la tot mai puternica industrializare a Angliei secolului al XIX-lea, Morris căuta căi de resuscitare a artizanatului artistic și de revitalizare a splendorii artelor decorative ale Evului Mediu. Morris and Company, iar mai târziu Kelmscott Press fondată de Morris în 1890, au creat uluitoare mozaicuri, servicii de masă și materiale textile, preocupându-se totodată și de ornarea cu desene medievale a manuscriselor. Dar conceperea designului tapetelor a fost domeniul în care Morris și-a atins mai întâi incredibila măiestrie în realizarea de modele repetate cu simetrie de translație. Două dintre impresionantele sale motive sunt prezentate în figura 11. Chiar dacă producțiile lui n-au fost poate cu nimic mai inovatoare decât cele ale unora dintre contemporanii săi, precum Christopher Dresser sau A.W.N. Pugin, influența și moștenirea lăsate de Morris au fost enorme. El era interesat de promovarea artei și a artizanatului, nu de matematica simetriei. În *Frumusețea vieții*[25], și-a rezumat astfel filozofia socio-estetică:

> Puteți atârna tapiserii pe pereți, în loc să-i văruiți sau să-i acoperiți cu hârtie; ori le puteți aplica un mozaic; ori puneți-l pe un mare pictor să vă realizeze niște fresce: toate acestea

nu înseamnă lux dacă sunt făcute de dragul frumuseții, și nu pentru paradă. Ele nu încalcă regula noastră de aur: „Să nu aveți în casele voastre nici un lucru despre care să credeți că nu e util sau frumos.“



a **Figura 11** b

O întrebare interesantă este dacă simetria de translație, ca și cele de reflexie și rotație sunt limitate la artele vizuale sau se pot manifesta și în alte forme de artă, cum ar fi muzica. Evident, dacă ne referim la sunete, nu la aspectul partiturii, ar trebui să definim simetriile în termeni diferiți de cei pur geometrici, așa cum am făcut și în cazul palindromurilor. Dar odată ce am făcut acest lucru, răspunsul la întrebarea „Putem găsi simetrie de translație în muzică[26]?“ este un răsunător „Da“. Așa cum scria în 1908 cristalograful rus G.V. Wulff[27]: „Spiritul muzicii este ritmul. El constă în repetarea periodică, regulată a unor părți din compoziția muzicală… Repetarea regulată a unor părți identice ale întregului constituie esența simetriei.“ Efectiv, temele recurente atât de comune în compoziția muzicală sunt echivalentele temporale ale imprimeurilor lui Morris și ale simetriei de translație. Mai general, compozițiile sunt deseori bazate pe un motiv fundamental introdus la început, care ulterior suportă diverse transformări.

Printre exemplele muzicale simple de simetrie de translație se numără măsurile inițiale din faimoasa Simfonie nr. 40 în sol

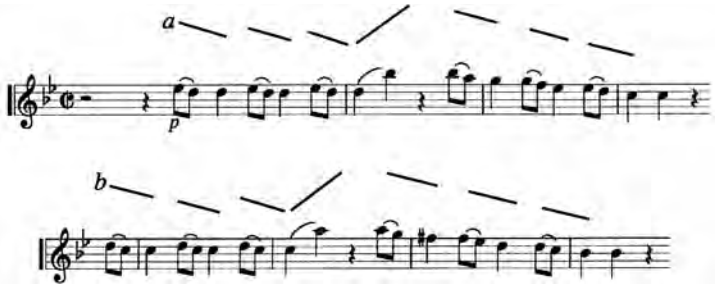



Figura 12

minor de Mozart (figura 12), ca și întreaga structură a compozițiilor realizate în unele dintre stilurile muzicale uzuale. În primul exemplu puteți vedea simetria de translație nu numai pe fiecare rând al partiturii (unde sunt marcate scurtele gesturi de coborâre), ci și între primul rând și cel de-al doilea (notate cu *a* și *b*). Pentru a descrie în termeni generali o piesă muzicală, cum ar fi un rondo, folosind simbolurile A, B și C pentru temele din care este compus, obținem un tipar ce poate fi exprimat sub forma ABACA sau ABACABA. Astfel, simetria de translație devine vizibilă. Asocierea lui Mozart cu simboluri matematice[28] n-ar trebui să surprindă. Sora lui, Nannerl, își amintea că el umpluse cândva cu numere pereții casei scărilor și ai tuturor încăperilor locuinței, și când nu mai rămăsese nici un loc, se mutase pe pereții unei case vecine. Chiar și marginile manuscriselor mozartiene ale Fanteziei și Fugii în do major conțin calcule ale probabilității de a câștiga la loterie. Nu-i de mirare atunci că muzicologul și compozitorul britanic Donald Tovey a identificat „proporțiile simetrice și frumoase" ale compozițiilor lui Mozart drept unul dintre motivele-cheie ale popularității lor.

Un alt mare compozitor despre care se știe că a fost obsedat de numere, jocuri mintale și modalitățile lor de utilizare în piese muzicale complexe este Johann Sebastian Bach[29] (1685–1750). Atât reflexia, cât și translația apar frecvent în muzica sa, la diverse niveluri. Un exemplu de reflexie în „oglindă" orizontală este dat de deschiderea Sonatei nr. 6 în mi major (vezi figura 13).

Închipuiți-vă o oglindă pusă în spațiul dintre cele două rânduri de partitură. Tendința ascendentă marcată de linia *a* este reflectată (o jumătate de măsură mai târziu) de tendința descendentă *b*, toată secvența fiind apoi repetată și reflectată din nou (începând din *d*). Un alt exemplu este dat de întreaga structură a uneia dintre cele mai remarcabile lucrări ale lui Bach, faimoasa *Ofrandă muzicală*. Compoziția este formată din următoarele episoade:

Ricercar 5 Canoane Sonată pentru trei instrumente
5 Canoane Ricercar

Ea prezintă o simetrie de reflexie (evident, nu sunet cu sunet).

Ricercar (de la *ricercare* – „a căuta") era un vechi termen folosit în sens larg pentru orice tip de preludiu, de obicei în stil fugato. Remarcabilul umanist, medic și filozof Albert Schweitzer (1875–1965) a fost și el un mare admirator al lui Bach. În cartea sa *J.S. Bach*, el scrie: „Cuvântul [ricercar] se referă la o bucată muzicală în care noi avem de căutat ceva – o anumită temă." *Ofranda muzicală* mai conține zece canoane care, prin construcție, implică operația de translație. În orice canon (cuvântul înseamnă „regulă"), un fir melodic determină regula (formulată în termeni de linie melodică sau de ritm) pentru vocea a doua sau următoarele. Vocea a doua urmează la un anumit interval de timp, prestabilit – se face o *translație temporală*. Un exemplu simplu și familiar este dat de cântecelul:

Merge, merge, merge barca,
Lin în josul râului.
Vesel, vesel, vesel, vesel,
Viața-i doar un vis,

în care vocea a doua intră acolo unde prima ajunge la cuvântul „lin".

Și povestea creării *Ofrandei muzicale* este fascinantă. Cu trei ani înainte de a muri, Bach se afla în drum spre Berlin pentru a o vizita pe nora sa Johanna Maria Dannemann (soția compozitorului Carl Philipp Emanuel Bach), care la vremea aceea era însărcinată. Epuizat de lunga călătorie, vârstnicul

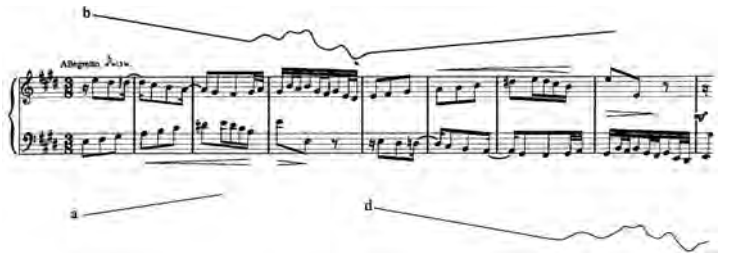


Figura 13

compozitor a făcut o oprire la Potsdam, pe atunci reședința regelui Frederic cel Mare al Prusiei, în slujba căruia se afla și Carl Philipp Emanuel. Vestea sosirii lui Bach la palat l-a determinat pe rege să suspende un concert de seară, în care el însuși ar fi trebuit să se producă la flaut, în favoarea unor recitaluri improvizate pe muzică de Bach, susținute cu șapte noi instrumente de tip pianoforte. Gottfried Silbermann, meșterul constructor de orgi al barocului german, realizase acele instrumente. După niște performanțe de mare virtuozitate avute în șapte încăperi diferite ale palatului, Bach i-a propus audienței încântate să improvizeze o fugă pe o temă sugerată de Înălțimea Sa Regală. Întors acasă, el a compus *Ofranda muzicală* pe baza acestei fugi improvizate. I-a adăugat câteva canoane de o superbă complexitate și o sonată pentru trei instrumente, apoi s-a preocupat de celelalte ritmuri, polifonice. Sonata trebuia interpretată cu un flaut (instrumentul regelui Frederic), o vioară și un bas (clavecin și violoncel). Drept titlu al *Ofrandei*, Bach, ca de obicei inventiv în materie de jocuri de cuvinte, a ales *Regis iussu cantio et reliqua canonica arte resoluta* (*După porunca regelui, tema și adaosurile rezolvate în stil canonic*), formând acronimul RICERCAR.

Ofranda muzicală conține, de fapt, mai multe simetrii. În Canonul I (*Canonul Crabului*), fiecare vioară cântă bucata muzicală a celeilalte, dar de la sfârșit spre început, rezultatul fiind o simetrie de reflexie (a partiturii) într-o oglindă verticală. În sfârșit, canoanele în general au fost considerate în acea vreme drept un fel de enigme ale simetriei. Compozitorul furniza

tema, dar rămânea în sarcina muzicienilor să determine tipul de simetrie la care se gândise el să-i fie aplicat temei. În cazul *Ofrandei muzicale* a lui Bach, ultimele două canoane de dinaintea sonatei erau însoțite de indicația „*Quaerendo inventis*“, însemnând „Căutați și veți găsi“. Așa cum vom vedea în capitolul 7, lucrul acesta nu diferă prea mult din punct de vedere conceptual de enigma pe care ne-o pune universul – el stă în întreaga-i glorie, deschis pentru a fi cercetat –, cerându-ne să-i găsim modelele și simetriile subiacente. Chiar și incertitudinile și ambiguitățile implicate de încercările de a descoperi „Teoria a tot ce există“ își pot găsi o analogie în provocarea intelectuală a lui Bach. Veți vedea, unul dintre canoanele *Ofrandei muzicale* are trei soluții posibile.

Translația și reflexia pot fi combinate într-un singur gen de simetrie, cunoscut sub denumirea de *reflexie cu translație*[30]. Urmele de tălpi lăsate de picioare ca urmare a mișcării lor alternative stângul-dreptul-stângul-dreptul prezintă o simetrie de reflexie cu translație (figura 14). Aceasta se obține pur și simplu printr-o translație (glisare), urmată de o reflexie față de o linie paralelă cu direcția deplasării (linia punctată din figură). Echivalent, o asemenea simetrie poate fi privită ca o reflexie în oglindă, urmată de o translație paralelă cu oglinda. Simetria de reflexie cu translație apare frecvent în frizele clasice, precum și în ceramica nativilor americani din New Mexico. În vreme ce modelele cu simetrii de translație tind să transmită o impresie de mișcare într-o anumită direcție, cele cu simetrii de reflexie cu translație creează o senzație de șerpuire. Șerpii adevărați creează astfel de senzații vizuale contractând și relaxând alternativ grupuri de mușchi de pe ambele părți ale corpului lor – atunci când își contractă un grup de pe dreapta, grupul corespunzător de pe stânga este relaxat, și viceversa.

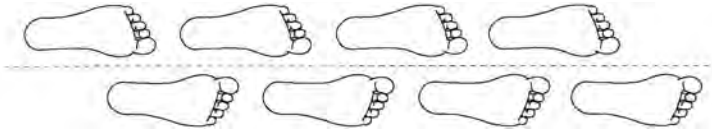


Figura 14

Am întâlnit până acum toate transformările rigide din care rezultă simetrii bidimensionale. Cuvântul *rigid* spune că după transformare orice două puncte păstrează între ele aceeași distanță pe care au avut-o la început – figurile nu pot fi micșorate, dilatate sau deformate.

În spațiul tridimensional, pe lângă simetriile de translație, rotație, reflexie și reflexie cu translație, mai putem găsi o simetrie, cunoscută sub denumirea de *simetrie elicoidală*. Acesta este tipul de simetrie al unui tirbușon, la care rotația în jurul axei este combinată cu mișcărea de translație de-a lungul ei. Anumite tije de plantă, pe care frunzele apar la intervale regulate după efectuarea unei rotații cu aceeași fracțiune de unghi în jurul tijei, posedă această simetrie. Sunt oare acestea toate simetriile existente? Categoric nu.

Toți sunt egali, dar…

Artele și științele sunt arhipline de exemple fascinante de simetrii de translație, rotație, reflexie și reflexie cu translație, iar asupra unora din ele vom reveni în capitolele următoare. O interesantă transformare de natură negeometrică este cea care implică *permutări* – diverse rearanjări de obiecte, numere sau concepte. De pildă, pentru a testa uzura a patru mărci diferite de anvelopă, le puteți schimba lunar pozițiile, timp de patru luni, așa încât fiecare anvelopă să ajungă pe rând într-una dintre cele patru poziții posibile. Dacă notați mărcile cu A, B, C, D, iar pozițiile cu FS (față stânga), FD (față dreapta), SS (spate stânga) și SD (spate dreapta), atunci planul pe patru luni ar putea arăta în genul următor:

LUNA	FS	FD	SS	SD
Prima	A	B	C	D
A doua	B	A	D	C
A treia	C	D	A	B
A patra	D	C	B	A

Fiecare linie sau coloană reprezintă o permutare a literelor A, B, C, D. De notat că, pentru a efectua testarea dorită, nici una dintre linii sau coloane nu trebuie să conțină aceeași literă de două ori. Acest gen de pătrate, de tip 4×4, sunt cunoscute sub denumirea de *Pătrate latine*[31], și ele au fost studiate intens de către matematicianul elvețian Leonhard Euler (1707–1783). Ca o paranteză, v-ați putea simți atrași să rezolvați următoarea problemă, foarte populară în secolul al XVIII-lea: Aranjați într-un pătrat toți valeții, popii, damele și așii dintr-un pachet de cărți de joc, în așa fel încât nici o culoare sau valoare să nu apară de două ori pe o linie, coloană sau pe una dintre cele două diagonale. În caz că aveți dificultăți cu această ghicitoare barocă, vă dau o soluție în Anexa 1.

Permutările apar în circumstanțe extrem de diverse[32], cum ar fi schimbul partenerilor în dansul popular scoțian și amestecul pachetelor de cărți de joc. În operația de permutare, nu contează locul fiecărui obiect în parte, ci care este obiectul care îl va înlocui. De exemplu, în permutarea $1\ 2\ 3\ 4 \rightarrow 4\ 1\ 3\ 2$, numărul 1 a fost înlocuit de 4, 2 de 1, 3 a rămas pe loc, iar 4 a fost înlocuit de 2. Aceasta se notează de obicei prin:

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix}$$

unde fiecare număr de pe prima linie este înlocuit de numărul aflat sub el. Aceeași operație de permutare ar fi putut fi scrisă și sub forma:

$$\begin{pmatrix} 3214 \\ 3142 \end{pmatrix}$$

deoarece aici au loc exact aceleași înlocuiri, ordinea în care sunt scrise numerele neavând importanță. Vă puteți pune întrebarea cum poate rămâne un sistem simetric (adică neschimbat) după o permutare? Evident, dacă pe un raft aveți zece cărți diferite, orice permutare diferită de cea identică (ce presupune lăsarea lor în aceleași poziții) le va schimba ordinea. Dar dacă aveți trei exemplare ale aceleiași cărți, e clar că anumite permutări vor lăsa ordinea neschimbată. Eseistul și criticul englez Charles

Lamb[33] (1775–1834), cunoscut pentru observațiile asupra vieții făcute prin prisma propriei experiențe, avea o opinie destul de clară asupra unor asemenea „rearanjări". El scrie: „Specia umană, conform cu cea mai bună teorie pe care o pot formula, se compune din două rase distincte, oamenii care care iau și oamenii care dau… Cei care iau cu împrumut cărți sunt mutilatorii de colecții, distrugătorii simetriei rafturilor, creatorii de volume disparate."

Simetria de permutare poate apărea în circumstanțe ceva mai abstracte. Considerați componentele propoziției „Robin este văr cu David". Sensul va rămâne același dacă-l schimbăm pe *David* cu *Robin*. Lucru care nu e adevărat pentru propoziția „Robin este fiul lui David". Similar, egalitatea între două cantități, $a = b$ este simetrică la transpoziția lui a cu b, dat fiind că $b = a$ reprezintă aceeași relație între cele două constante. Chiar dacă poate părea trivial, relația „mai mare decât" (notată de obicei prin simbolul >) nu are această proprietate. Relația $a > b$ înseamnă „a este mai mare decât b". Permutând literele, obținem $b > a$, adică „b este mai mare decât a", cele două afirmații excluzându-se reciproc.

Diverse alte formule matematice pot prezenta, de asemenea, simetrie de permutare. Valoarea expresiei $ab + bc + ca$ (unde ab înseamnă „a înmulțit cu b" ș.a.m.d.) rămâne neschimbată după orice permutare a literelor a, b, c. Așa cum voi arăta mai detaliat ulterior, există exact șase permutări posibile ale celor trei litere, inclusiv una (prima de mai jos) care reprezintă transformarea identică, fiecare literă fiind așezată peste ea însăși:

$$\begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abc \\ acb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abc \\ cba \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abc \\ bac \end{pmatrix}$$

Vă puteți convinge cu ușurință că expresia de mai sus nu este alterată de aceste permutări. De exemplu, cea de a treia permutare îl schimbă pe a cu b, pe b cu c și pe c cu a. Întreaga formulă devine deci $bc + ca + ab$. Rezultatul fiind același indiferent de ordinea în care înmulțim sau adunăm numerele, noua expresie este egală cu cea inițială.

Jucătorii de ruletă[34] dintr-un cazino reprezintă un caz interesant de simetrie de permutare. Ruleta este compusă dintr-un disc rotativ cu 18 șanțuri roșii, 18 negre și două verzi. Toate șanțurile sunt numerotate, cele verzi fiind marcate de regulă cu cifrele 0 și 00. O bilă albă este lansată pe discul rotativ și, după câteva tururi rapide făcute la periferia acestuia, sfârșește prin a se opri într-unul dintre șanțuri. Atunci când discul este perfect din punct de vedere mecanic, jocul de ruletă este absolut simetric la orice permutare a jucătorilor. Pentru fiecare dintre ei există exact aceeași probabilitate de câștig sau de pierdere, indiferent dacă sunt jucători inveterați sau novici, experți în teoria probabilităților sau idioți ai satului. Perspectiva de câștig[35] (sau mai degrabă de pierdere, în medie de circa 5,3 cenți per dolar pariat) nu depinde de suma pusă în joc ori de strategia jucătorului. Deși nu poate exista o roată mecanică perfectă, secolele de profituri ale cazinourilor dovedesc că, orice mici excepții ar exista, ele nu conduc la o încălcare semnificativă a regulii simetriei de permutare.

Nu toate jocurile de noroc prezintă simetrie de permutare. *Blackjack* este un joc de cărți care presupune ca fiecare jucător de la masă să joace împotriva dealerului. Cărțile numerotate au valorile înscrise pe ele, cărțile cu figuri valorează, toate, câte zece puncte, iar asul oferă opțiunea de a fi considerat egal cu unu sau unsprezece. Obiectivul este acela de a achiziționa cărți cu valoare însumată mai apropiată de 21 decât cele din mâna dealerului, fără a depăși însă limita celor 21 de puncte. Jocul este asimetric la permutarea jucătorilor tocmai din cauza faptului că strategia contează. Prin anii 1960, cazinourile au descoperit importanța strategiei într-o manieră destul de dură. Matematicianul Edward O. Thorp a arătat că modul în care ele calculau probabilitățile atunci când pachetul de cărți începea să se termine avea o hibă. El a folosit această informație pentru a dezvolta o metodă de joc extrem de profitabilă. Dacă sunteți curioși, cazinourile au luat de atunci măsuri de corecție. Cu toate acestea, rămâne adevărat că strategia contează la *Blackjack*. Într-adevăr, șase studenți de la MIT care comunicau prin cuvinte codificate au câștigat milioane la Las Vegas în anii 1990.

Simetria de permutare și unele dintre rubedeniile ei științifice au consecințe până și în fizica universului subatomic, și vom reveni asupra unora dintre ele în capitolul 7. Aici voi da pe scurt un singur exemplu simplu, care explică o ciudățenie a atomilor diverselor elemente – faptul că ei au aproximativ aceeași mărime.

Atomii seamănă oarecum cu niște sisteme solare în miniatură. Electronii atomului se rotesc în jurul unui nucleu central, exact așa cum planetele se învârtesc în jurul Soarelui. Forța care menține electronii pe orbitele lor nu este însă de natură gravitațională, ci electromagnetică. Nucleul conține protoni, care au sarcini electrice pozitive (și neutroni, care sunt neutri), pe când electronii care se rotesc în jurul lui (egali la număr cu protonii) sunt încărcați negativ. Sarcinile electrice opuse se atrag reciproc. Spre deosebire de sistemele planetare, care pot avea orbite de orice mărime, atomii trebuie să se supună legilor universului subatomic – *mecanicii cuantice*. Electronii se plasează, cu cea mai mare probabilitate, pe anumite orbite specifice, „cuantizate", restrânse la o serie particulară de mărimi discrete. Orbitele permise sunt caracterizate în principal de energia lor. În general vorbind, cu cât energia asociată orbitei este mai mare, cu atât mărimea ei este mai mare. Situația este oarecum analogă cu cea a unei scări, pe a cărei primă treaptă de jos se află nuvelul, iar următoarele, tot mai ridicate, corespund nivelurilor superioare de energie. Aici apare însă ciudățenia. Fizica, și viața cotidiană de altfel, ne învață că sistemele au stabilitate maximă la nivelul energetic cel mai scăzut posibil (de pildă, o minge ce se rostogolește pe o scară își atinge stabilitatea la baza ei). Aceasta ar trebui să însemne că, indiferent dacă avem de-a face cu atomul de hidrogen, care are un singur electron, cu cel de oxigen, care are opt electroni, sau cu cel de uraniu, cu nouăzeci și doi de electroni, toți electronii ar trebui să fie înghesuiți pe cea mai mică orbită posibilă. Deoarece atracția electromagnetică dintre nucleu și electroni crește proporțional cu numărul de electroni și protoni, ne-am aștepta ca atomul de oxigen să fie mai mic decât atomul de hidrogen, iar atomul de uraniu cu mult mai mic decât amândoi (așa cum sunt ei reprezentați schematic

în figura 15). Experimentele arată însă că o asemenea concluzie este departe de realitate: indiferent de numărul de electroni, se constată că atomii au aproximativ aceeași mărime. De ce?

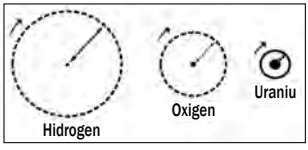


Figura 15

Explicația a fost dată de faimosul fizician Wolfgang Pauli (1900–1958). În 1925, el a formulat o importantă lege a naturii (care în 1945 i-a adus Premiul Nobel), cunoscută sub denumirea de *Principiul excluziunii*[36]. Legea se referă la anumite particule elementare de același tip, cum sunt electronii. Toți electronii din univers sunt absolut identici din punctul de vedere al caracteristicilor intrinsece – nu există nici o cale de a-l deosebi pe unul de altul. Pe lângă masa și sarcina lor electrică, electronii mai au o caracteristică fundamentală, numită *spin*. Pentru anumite scopuri, spinul ar putea fi calculat mai ușor dacă am considera că electronul este o sferă micuță, ce se rotește în jurul axei sale. Mecanica cuantică – teoria care descrie atomii, lumina și particulele subatomice – ne spune că spinul electronului nu poate avea decât două orientări (oarecum analoge cu rotirea mingii cu o anumită viteză într-o direcție sau în direcția opusă). Conform Principiului excluziunii, doi electroni nu pot fi în exact aceeași stare; cu alte cuvinte, nu pot avea exact aceeași orbită și orientare a spinului. Cum se leagă asta de simetrie? Pentru a formula mai exact Principiul excluziunii, trebuie să realizăm faptul că mecanica cuantică folosește limbajul probabilităților. Nu putem niciodată determina cu precizie locația unui electron în interiorul atomului, ci doar diferitele probabilități de a-l găsi într-o anumită poziție. Ansamblul tuturor acestor probabilități e cunoscut sub denumirea de *funcție de probabilitate*. Această funcție joacă rolul unei hărți, care ne arată unde găsim cel mai probabil electronul. La fel, Pauli și-a formulat principiul în termenii unei proprietăți a funcției de probabilitate, ce descrie mișcarea electronilor în atom. El a afirmat că funcția de probabilitate este antisimetrică la inversarea oricărei perechi de electroni. Despre o astfel de funcție se spune că este antisimetrică dacă doi electroni care

se mișcă pe aceeași orbită și au aceeași orientare vectorială a spinului schimbă doar semnul funcției (de exemplu, din plus în minus), nu și valoarea ei. Să ne imaginăm bunăoară că litera *a* simbolizează valoarea unei proprietăți a primului electron, iar litera *b*, valoarea aceleiași proprietăți a celui de-al doilea electron. O funcție care ia valoarea $a + b$ este simetrică la permutarea celor doi electroni, dat fiind că $a + b = b + a$. Pe de altă parte, funcția $a - b$ este antisimetrică, deoarece schimbarea lui *a* cu *b* și a lui *b* cu *a* îl modifică pe $a - b$ în $b - a$, iar $b - a$ este exact negativul lui $a - b$ (de exemplu, $5 - 3 = 2$; $3 - 5 = -2$).

Afirmația lui Pauli reprezintă deci cheia problemei. Pe de o parte, știm că permutarea a doi electroni identici n-ar trebui să aducă nici o modificare, iar funcția de probabilitate ar trebui să rămână neschimbată. Pe de altă parte, Principiul excluziunii ne spune că funcția de probabilitate ar trebui să-și schimbe semnul (bunăoară din pozitiv în negativ) după o astfel de permutare. Ce fel de număr este cel egal cu negativul său ? Nu există decât un singur astfel de număr – zero. Schimbând semnul din fața lui zero, nu i se schimbă valoarea; minus zero este egal cu plus zero. Cu alte cuvinte, probabilitatea de a găsi doi electroni cu același spin mișcându-se pe aceeași orbită este egală cu zero – nu există o asemenea stare.

Principiul excluziunii ne spune că electronilor cu aceleași proprietăți nu le place să fie înghesuiți în același loc. Ca urmare, pe fiecare orbită nu pot exista mai mult de doi electroni (unul pentru fiecare orientare posibilă a spinului). În loc ca toți electronii să se aglomereze pe cea mai mică orbită (cea cu energie minimă), ei sunt siliți să se repartizeze pe orbite succesive, cu energii și dimensiuni din ce în ce mai mari. Rezultatul este că, deși mărimile orbitelor cuantizate sunt mai mici la atomii grei (cei bogați în protoni), electronilor nu le rămâne altceva de făcut decât să ocupe un număr sporit de orbite. În mod spectaculos, comportarea funcției de probabilitate la permutarea electronilor explică de ce atomii au mărimi aproape egale, nefiind în realitate ca cei reprezentați în figura 15.

Revenind acum la permutări în general, transformările de culoare[37] pot fi considerate similare. Orice configurație realizată

din mai mult de o singură culoare, cum este o tablă de șah, dă posibilitatea schimbării culorilor între ele. Strict vorbind, configurațiile reale sunt de obicei nesimetrice la transformări de culoare – ele se schimbă după o astfel de transformare. Câteva dintre lucrările pline de imaginație ale lui M.C. Escher sunt foarte aproape de a fi simetrice (figura 16). De observat că imaginea nu rămâne cu adevărat aceeași dacă negrul și albul se schimbă între ele, după cum nici o tablă de șah nu o face. Totuși, impresia vizuală generală rămâne aceeași.

Figura 16

Escher însuși n-a știut prea bine niciodată[38] ce anume l-a condus spre obsesia lui pentru modele cu simetrii de translație și culoare. Cu propriile-i cuvinte,

> M-am mirat deseori de mania mea de a face astfel de desene, caracterizate de o anumită periodicitate. L-am întrebat odată pe un prieten, un psiholog, asupra motivului fascinației mele, dar răspunsul lui, că aș fi mânat de un instinct primar, prototipic, nu explică nimic. Cum se face că sunt singur în acest domeniu? De ce nici unul dintre confrații mei nu pare la fel de fascinat de aceste forme întrepătrunse? Regulile lor sunt totuși pur obiective; orice artist le poate aplica în maniera personală!

Meditațiile retrospective ale lui Escher ating două subiecte importante: rolul simetriei în procesul „primar" al percepției și regulile subiacente simetriei. Ultimul subiect va fi tema mai multor capitole ulterioare. Cum însă orice informație pe care o obținem despre lume ne parvine prin intermediul simțurilor, problema simetriei ca potențial factor al percepției capătă o relevanță imediată.

2
iițnim iihco nî eirtemiS

Dintre toate simțurile omenești, văzul este de departe cel mai important mijloc de percepție. Dar ochii nu sunt decât niște instrumente optice; percepția implică participarea creierului. Percepția vizuală este un complex de procese cerebrale care combină senzațiile primite din lumea externă pentru a produce o imagine informațională. Mediul nostru înconjurător dă mult mai multe semnale decât putem analiza. Ca urmare, percepția implică o cernere a mulțimii de date și o selectare a celor mai utile. Atunci când jucătorii de șah se gândesc la următoarea mutare, ei nu examinează mintal toate mișcările posibile de pe tablă. Se concentrează doar asupra acelor câteva mutări care par cele mai benefice în lumina stocului de informație acumulată – lucru pe care noi îl numim memorie. În filmul lui Woody Allen *Blestemul scorpionului de jad*, Dan Aykroyd joacă rolul șefului unei companii de asigurări. Într-o scenă, el îi spune unuia dintre investigatorii săi, C.W. Briggs (interpretat de Woody Allen), următoarele cuvinte „Știți, există un cuvânt pentru oamenii care cred că toată lumea conspiră împotriva lor." La care Woody Allen răspunde: „Mda – perceptivi!" În realitate, paranoia reprezintă, firește, o distorsionare a percepției.

În aparență, percepția vizuală are de îndeplinit o misiune imposibilă. Ea trebuie să transforme ciocnirea fizică a cuantelor de lumină (numite *fotoni*) de receptorii din fundul ochiului în imagini mintale ale obiectelor. Așa cum vom vedea în curând, simetria dă un ajutor important pentru atingerea acestui scop.

În primul rând însă, trebuie să apreciem ce tipuri de dificultăți sunt întâmpinate. Astronomia ne poate ajuta să ilustrăm unul dintre numeroasele obstacole de pe parcursul acestui proces – și anume, percepția distanței. Figura 17 prezintă o fotografie făcută cu Telescopul Hubble[1], îndreptat spre haloul sferic al stelelor din jurul galaxiei Andromeda (denumit de astronomi M31). O galaxie este o vastă mulțime de câteva sute de miliarde de stele asemănătoare cu Soarele. M31, aflat la o distanță de circa 2,5 milioane de ani-lumină, este unul dintre vecinii cei mai apropiați ai galaxiei noastre – Calea Lactee. (Un an-lumină are aproximativ 9,5 trilioane de kilometri.) Fotografia din figura 17 cuprinde circa zece mii de stele din M31 și aproape o sută de alte galaxii, care se văd în fundal (dintre care unele apar sub forma unor corpuri cerești neclare, de mari dimensiuni). Aici este problema. Privind fotografia, nu putem aprecia prin comparație dacă stelele se află în propria noastră „ogradă" (la o distanță de 2,5 milioane de ani-lumină), iar galaxiile, la mai mult de 10 *miliarde* de ani-lumină! Similar, când privim la lumea din jurul nostru, ochiul nu recunoaște decât direcția razei de lumină pe care a călătorit un foton. Cum imaginea este proiectată pe o suprafață bidimensională (retina), fără câteva alte informații suplimentare, creierul nu are nici o indicație despre distanța până la punctul de plecare al fotonului. În cazul unei stele relativ apropiate, astronomii rezolvă această problemă de determinare a distanței folosind *metoda calculării elipselor de paralaxă.* Ei privesc steaua din două puncte diferite ale orbitei Pământului (figura 18). În cursul unui an, steaua apropiată pare să se deplaseze în raport cu stelele îndepărtate (fixe), din fundal. Măsurând unghiul asociat acestei mișcări aparente, cunoscând diametrul orbitei terestre și folosind trigonometria simplă de liceu, se poate calcula distanța până la stea.

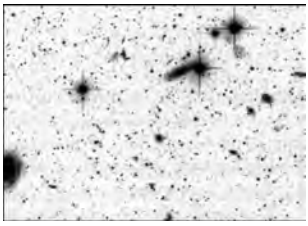


Figura 17

Oamenii își folosesc ochii în exact același mod pentru percepția spațială. Puteți descoperi acest mecanism, cunoscut

ca *vedere stereoscopică*[2], prin următorul experiment simplu. Întindeți brațul, ridicați un deget și priviți-l în raport cu un obiect oarecare din fundal. Închizând alternativ câte un ochi, veți avea senzația că degetul își schimbă poziția față de obiectul de referință din spatele lui. Dacă apropiați degetul de ochi, veți observa că distanța dintre cele două poziții crește. Această deplasare aparentă (paralaxă) se produce deoarece cei doi ochi văd degetul din puncte diferite. Cum paralaxa depinde de distanța până la obiect, măsurând unghiul dintre pozițiile lui aparente și cunoscând depărtarea dintre ochi, creierul „trigonometrizează" distanța până la obiect. Dacă vi se pare perfect normal ca închiderea unui ochi să ducă la o slăbire a percepției profunzimii spațiale, s-ar putea să credeți că rolul celor doi ochi în vederea stereoscopică a fost cunoscut încă din Antichitate. În mod surprinzător, chiar și unora dintre cei mai mari cercetători ai perspectivei le-a scăpat în întregime conceptul de vedere stereoscopică. Matematicieni precum Euclid din vechea Grecie, arhitecți renascentiști precum Brunelleschi și Alberti, pictorii Piero della Francesca, Paolo Ucello și Albrecht Dürer, și chiar marele Isaac Newton au luat cei doi ochi drept o simplă manifestare a simetriei bilaterale, fără nici o altă funcție specială. Primul care a observat că doi ochi pot realiza ceea ce unul singur nu poate face a fost reprezentantul prin excelență al Renașterii – Leonardo da Vinci (1452–1519). Leonardo nota că atunci când privim cu ambii ochi un obiect, cel drept reușește să vadă și o parte din spațiul de la dreapta obiectului, în timp ce stângul vede o parte din spațiul de la stânga obiectului. Leonardo conchidea deci că „obiectul… văzut cu ambii ochi devine parcă transparent… dar acest lucru nu se poate întâmpla când un obiect… este privit cu un singur ochi". În ciuda acestei intuiții, restrângându-și atenția doar la sfere, Leonardo a scăpat ocazia de a descoperi că cei doi ochi surprind imagini diferite nu numai ale fundalului, ci și ale obiectului însuși. Cel care a stabilit importanța vederii binoculare pentru perceperea distanțelor a fost astronomul german Johannes Kepler (1571–1603). În două cărți remarcabile[3], *Astronomiae Pars Optica* (*Partea optică a astronomiei)*, publicată în 1604, și *Dioptrice* (*Dioptrica*,

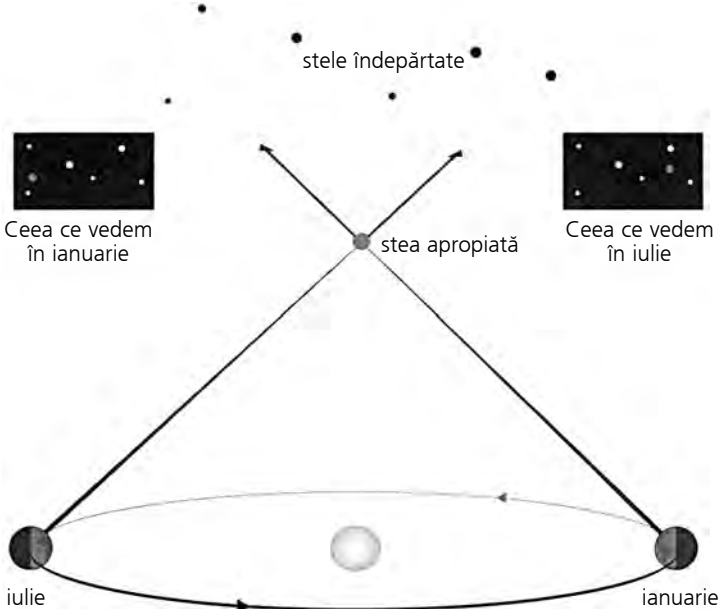


Figura 18

ramura opticii care se ocupă de refracție), publicată în 1611, Kepler a descris detaliat optica ochiului, explicând rolul ochelarilor și formulând o teorie a vederii stereoscopice. Opera lui Kepler a rămas însă oarecum neobservată; nici măcar Charles Wheatstone[4], care a redescoperit în 1838 mecanismul percepției profunzimii, nu pare să fi fost la curent cu ea.

Charles Wheatstone (1802–1875) se născuse într-o familie de mari iubitori ai muzicii, primele lui cercetări având drept obiect sunetele, vibrațiile unor elemente sonore precum corzile sau tuburile și instrumentele muzicale. În 1822, el a făcut o demonstrație publică în prăvălia londoneză a tatălui său, oferind muzică nu numai pentru urechi, ci și pentru ochi. „Lira Fermecată“ pe care o crease era atârnată de o sârmă subțire care trecea prin plafon, ajungând în încăperea de deasupra, unde era conectată la cutiile de rezonanță ale unui pian, unei harpe și unui timpanon. Atunci când Wheatstone cânta la instrumentele

din încăperea de sus, Lira Fermecată părea să cânte singură. Experimentator cu multă imaginație, el a inventat concertina (un instrument muzical asemănător cu un mic acordeon) și a obținut un brevet de invenție în Anglia, pentru telegraful electric.

Wheatstone și-a început experimentele asupra vederii stereoscopice în 1832, prezentându-și teoria într-o lucrare publicată pe 21 iunie 1838. Titlul lucrării era „Contribuții la fiziologia vederii. Prima parte. Despre niște fenomene remarcabile, până acum neobservate, ale vederii binoculare". Primul ei paragraf descria esența descoperirii – faptul că incongruența imaginilor de pe cele două retine și procesul mintal care urmează dau naștere percepției spațiale. Apelând la cuvintele lui Wheatstone:

> Atunci când un obiect este privit de la o distanță atât de mare încât axele optice ale ambilor ochi ajung să fie practic paralele, proiecțiile sale, văzute de fiecare ochi în parte, sunt asemănătoare, iar cei doi ochi văd același lucru, ca și când obiectul ar fi privit cu un singur ochi… Dar această asemănare dispare atunci când obiectul este plasat atât de aproape de noi, încât, pentru a-l vedea, axele optice trebuie să devină convergente… Acest fapt poate fi verificat cu ușurință așezând orice corp tridimensional, de pildă un cub, la o distanță medie față de ochi și privindu-l alternativ cu câte unul dintre ei, în timp ce celălalt este închis, iar capul e ținut absolut fix.

Am descris atât de amănunțit descoperirea proceselor simple implicate în percepția profunzimii spațiale deoarece această poveste ne ajută să exemplificăm imensele dificultăți întâmpinate la încercările de înțelegere temeinică a fenomenului percepției. Teoriile privitoare la percepția umană pot umple, și chiar au umplut, volume întregi. Aici mă voi concentra doar la funcția simetriei în acest proces.

Rolul simetriei în percepție a fost adus în centrul atenției de către școala de gândire cunoscută sub denumirea de *Gestalt-Psychologie*. Psihologii Max Wertheimer, Kurt Koffka și Ivo Kohler, care au inițiat această doctrină, au înființat un influent laborator de cercetări în psihologie la Universitatea din Frankfurt, în 1912. Una dintre problemele-cheie pe care au abordat-o psihologii gestaltiști a fost cea a organizării perceptuale –

modul în care fragmentele disparate de informație primite prin intermediul simțurilor sunt organizate în structuri perceptuale unitare. Cum știm care elemente constitutive au legătură unele cu altele, pentru a forma imaginea generală a unui obiect? Cum deosebim un obiect de altul și cum facem distincție între un obiect și fundal? „Legea" fundamentală a organizării perceptuale din psihologia gestaltistă[5] este cunoscută sub denumirea de *Principiul pregnanței*, și poartă în mod obișnuit numele de legea „figurii inteligibile". Legea afirmă: „Dintre mai multe organizări geometrice posibile, cea văzută este cea cu forma cea mai clară, simplă și stabilă." Pentru psihologii gestaltiști, simetria era deci unul dintre elementele-cheie, ce contribuia semnificativ la „inteligibilitatea" figurii. Un aranjament de patru puncte, ca cel din figura 19, va fi perceput ca un pătrat, deoarece „inteligibilitatea" pătratului ca formă simetrică, închisă și stabilă este mai mare decât, să zicem, cea a unui triunghi căruia i s-a adăugat un punct suplimentar. În vreme ce psihologii gestaltiști n-au reușit niciodată să formuleze o teorie precisă a percepției formei, teoreticienii ulteriori, precum psihologul olandez Emanuel Leeuwenberg și americanii Wendell Garner și Stephen Palmer, au extins principiile lor fundamentale. Garner și Palmer au recunoscut în special[6] rolul simetriilor de diverse tipuri (precum simetriile de rotație și de reflexie) în sporirea „inteligibilității" figurii.

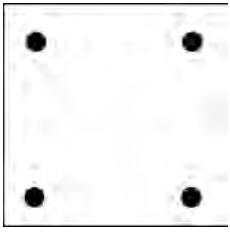


Figura 19

Leeuwenberg și colaboratorii săi au dezvoltat o teorie a reprezentării formei în general, cunoscută sub denumirea de *teoria informației structurale*[7]. Cele două concepte fundamentale ale acestei teorii sunt *codurile* și *încărcăturile informaționale*. Codurile sunt descrieri perceptuale simple care pot genera o figură observată. De exemplu, pentru a descrie un dreptunghi, putem porni din colțul din stânga-sus, stabilind o lungime pentru segmentul care trebuie desenat (figura 20) și un unghi pentru direcția în care trebuie să ne îndreptăm ulterior. Stabilim apoi următoarea lungime și dăm din nou o valoare unghiulară.

Codul final pentru desenarea dreptunghiului ar lua forma *a* 90 *b* 90 *a* 90 *b* 90. Observați totuși că, deoarece aceleași instrucțiuni se repetă de două ori, putem simplifica acest cod scriind 2*(*a* 90 *b* 90).

Încărcătura informațională este o măsură a complexității celui mai simplu cod care duce sarcina la îndeplinire. În general, o puteți calcula prin numărarea parametrilor codului (precum *a, b* și 90 din exemplul precedent). Ideea fundamentală a acestei teorii este că „inteligibilitatea" figurii crește odată cu scăderea încărcăturii informaționale. Figurile simetrice conțin o încărcătura informațională mai mică și deci se află mai sus pe scara „inteligibilității". Pentru codul dreptunghiului, bunăoară, încărcătură informațională este 4: numărul de iterații (2); cele două lungimi (*a, b*); și unghiul (90). Pe de altă parte, pentru un patrulater oarecare, încărcătura informațională ar fi 8 (patru lungimi și patru unghiuri).

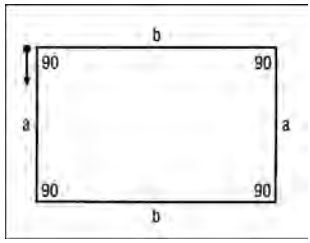


Figura 20

Alte două elemente importante din principiile gestaltiste ale organizării sunt *proximitatea* și *similitudinea*. „Legea" proximității spune că, în general, formele apropiate spațial una de alta sunt procesate în grup de creier. În figura 21a noi percepem niște coloane, deoarece intervalele verticale dintre puncte sunt mai mici decât cele orizontale. În figura 21b, este exact invers, motiv pentru care percepem niște linii. Atunci când intervalele sunt egale (figura 21c), rămânem cu o impresie ambiguă.

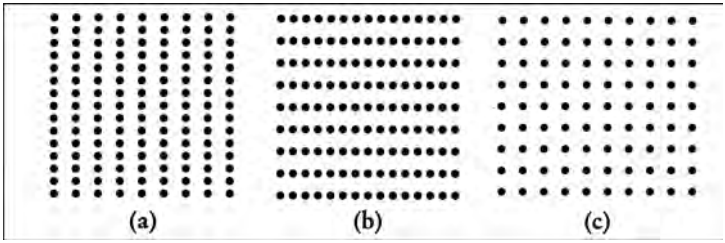


Figura 21

Și formele similare tind să fie grupate prin asociere, similitudinea putând fi uneori un element organizațional mai influent decât proximitatea. În figura 22, tindem să percepem niște coloane din cauza similitudinii cercurilor negre, deși, dacă am lua în calcul numai proximitatea și toate cercurile ar fi negre, am vedea niște linii.

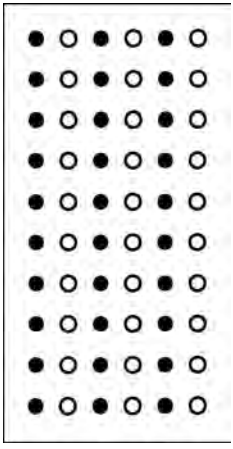


Figura 22

Simetria joacă un rol important în recunoașterea similitudinii, deoarece reprezintă un adevărat *invariant* – o imunitate la schimbare. Ca urmare, simetria este o trăsătură deosebit de utilă, pe care sistemul perceptiv o folosește pentru a determina dacă formele observate sunt similare sau diferite.

Un alt principiu gestaltist este cel al *continuității* – simbolul **X** este perceput sub forma a două linii care se intersectează, nu a două litere **v**, una în poziție normală și alta în poziție inversată, având vârfurile în contact. *Destinul comun* reprezintă și el un principiu de grupare. Tindem să grupăm lucrurile care se mișcă cu aceeași viteză, în aceeași direcție. Profetul biblic Amos[8] era deja pe deplin conștient de acest principiu atunci când întreba: „Pot doi oameni să meargă împreună dacă nu și-au dat o întâlnire?“

Psihologul Stephen Palmer și colaboratorii săi de la Universitatea din California, Berkeley, au adăugat la principiile organizării pe cele ale *regiunii comune, conexiunii* și *sincroniei*[9]. Figura 23 ilustrează aceste principii. Regiunea comună se referă la faptul că elementele sunt grupate atunci când sunt incluse într-o zonă închisă a spațiului (figura 23a). Conexiunea presupune să percepem drept unități elementele între care pare a exista o legătură fizică (figura 23b). În fine, sincronia

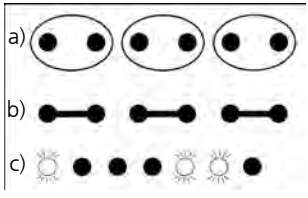


Figura 23

reflectă faptul că evenimentele vizuale simultane sunt percepute ca fiind asociate (figura 23c).

Simetria, în particular cea bilaterală, este de asemenea unul dintre elementele-cheie ale izolării vizuale a unui obiect – capacitatea de a-l vedea detașându-se dintr-un anumit fundal. Aruncați o privire rapidă pe figura 24 – atât în stânga, cât și în dreapta – și decideți care culoare reprezintă figura și care e fundalul. Ariile bilateral simetrice tind să fie percepute ca figuri în raport cu fundaluri asimetrice. Ca urmare, în stânga figurii 24, suntem înclinați să identificăm ariile negre drept figuri, pe când în dreapta, figurile sunt cele albe. Orientările verticale și orizontale sunt, la fel, mai susceptibile să fie văzute drept figuri decât oricare alte orientări. Și în cele din urmă, ariile mai mici înconjurate de unele mai mari tind să fie identificate drept figuri, la fel ca și formele semnificative sau familiare.

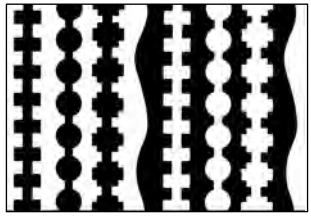


Figura 24

Ați băgat probabil de seamă că „legile“ inițiale ale gestaltismului nu erau decât *euristice* – niște principii empirice, care pot funcționa de cele mai multe ori, dar nu totdeauna. Ele foloseau concepte vag definite, precum „inteligibilitatea“ sau „similitudinea“. Ne putem pune întrebarea cum se face că funcționează totuși. Răspunsul este că reprezintă, probabil, o combinație de învățare și evoluție. Așa cum a spus cândva Oscar Wilde[10], „Experiența este numele pe care toți oamenii îl dau greșelilor lor.“ Generații de-a rândul, umanitatea a uzat de percepții și, dintr-un număr infinit de experiențe perceptuale, a învățat la ce să se aștepte. În ciuda neajunsurilor lor, principiile inițiale ale gestaltismului au fost utile, deoarece furnizau un răspuns rapid. Atunci când vreți să vă găsiți cheile, vă duceți întâi în cele două locuri unde le lăsați de regulă, și numai după aceea, dacă dați greș, vă apucați să scotociți sistematic casa.

În general, teoriile psihologice și rezultatele experimentale recente confirmă rolul important al simetriei în percepție[11]. Multe experimente arată că simetria bilaterală față de o axă

verticală este cel mai ușor de recunoscut (adică e recunoscută cel mai repede) și că ea este folosită ca element de apreciere în judecăți de tip „identitate-diferență". În esență, simetria este o proprietate care atrage privirile încă din primele stadii ale dezvoltării vederii. Ea este, de asemenea, utilă pentru a deosebi organismele vii (inclusiv potențialii prădători) de lucrurile neînsuflețite și în selecția partenerilor doriți (voi reveni la aceste subiecte în capitolul 8). Alte experimente au demonstrat că figurile simetrice sunt reproduse mai ușor decât cele asimetrice. Într-un studiu interesant, psihologii Jennifer Freyd și Barbara Tversky[12] de la Universitatea Stanford au descoperit că, în prima fază, subiecții determinau rapid dacă un ansamblu este sau nu simetric. Apoi, dacă el era perceput ca fiind simetric, unii subiecți distorsionau mintal imaginea și presupuneau (uneori incorect) că și părțile lui componente ar fi simetrice.

Un rezultat interesant, care sugerează că preferința pentru diverse tipuri de simetrii poate fi o caracteristică învățată, provine din experimentele conduse de psihologul Ioannis Paraskevopoulos[13] de la Universitatea Illinois. Subiecții lui au fost 76 de elevi de școală elementară. Paraskevopoulos a constatat că simetria dublă (verticală și orizontală) – era preferată la vârsta de șase ani, simetria bilaterală (numai reflexie verticală) – la vârsta de șapte ani, iar simetria orizontală (reflexie orizontală) la vârsta de unsprezece ani.

Unele dintre cele mai captivante studii recente sunt cele care încearcă să folosească rezonanța magnetică nucleară (RMN) pentru realizarea unor hărți ale ariilor cerebrale[14] influențate de simetrie. Psihologul Christopher W. Tyler de la Smith-Kettlewell Eye Research Institute din San Francisco a prezentat unor subiecți diverse configurații cu simetrii de translație și reflexie. El a constatat că acești stimuli activau o regiune din lobul occipital, a cărei funcție este în rest necunoscută.

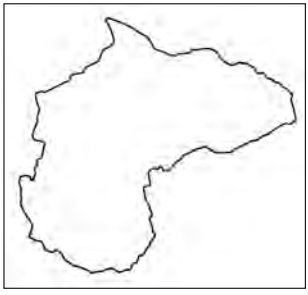


Figura 25

În mod surprinzător, în ariile cu funcţii vizuale cunoscute s-a constatat o foarte slabă activare sau chiar absenţa acesteia. Tyler a conchis că regiunea occipitală codifică probabil prezenţa simetriei în câmpul vizual.

Figura 26

Relaţia dintre simetrie şi orientare[15] este la fel de fascinantă. Figurile simetrice nu se schimbă atunci când sunt rotite, reflectate sau translatate în anumite moduri. Multe forme nu rămân însă simetrice oricare ar fi transformarea la care sunt supuse (cu excepţia celei identice, care le lasă neatinse), iar modul în care le percepem noi este clar afectat, bunăoară, de orientarea lor. Aruncaţi, de exemplu, o scurtă privire la figura 25. Aţi recunoscut în ea harta Africii? Sau, fără a întoarce cartea cu susul în jos, recunoaşteţi persoana din figura 26?

Chiar şi percepţia simetriei poate ascunde anumite capcane. O formă poate prezenta simetrie de reflexie în raport cu o anumită axă, ca cea din figura 27a, dar dacă n-o întoarceţi ca în figura 27b, aşa încât axa de simetrie să fie verticală, s-ar putea să nu-i percepeţi simetria. Cercetătorul Irvin Rock şi colaboratorii săi de la Universitatea Rutgers au efectuat o serie de experimente destinate testării dependenţei de orientare a percepţiei formei. Mai exact, ei doreau să vadă dacă percepţia simetriei bilaterale se face când axa de simetrie a imaginii formate pe retină este verticală sau e suficient ca ea să fie doar percepută ca fiind verticală. Cercetătorii au folosit o formă standard, ca cea prezentată în figura 28a. Această formă prezintă simetrie de reflexie, atât pe verticală, cât şi faţă pe orizontală. Subiecţilor li s-a cerut să indice care dintre figurile 28b şi 28c ar fi mai asemănătoare

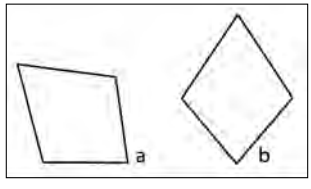


Figura 27

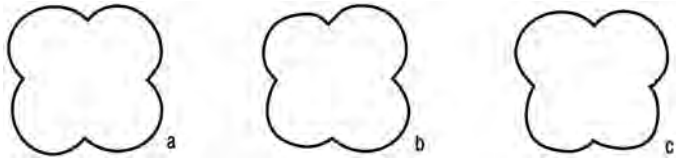


Figura 28

cu 28a. Observați că figura 28b a fost puțin modificată, așa încât să nu fie simetrică față de o axă verticală, dar să-și păstreze simetria față de axa orizontală, în timp ce cu figura 28c s-a procedat invers. Atunci când au observat figurile fără a-și înclina capetele, cei mai mulți dintre subiecți au ales figura 28c. Era de așteptat; fizicianul și filozoful moravo-austriac Ernst Mach[16] (1838–1916) sesizase încă din 1914 că figurile sunt percepute ca simetrice în primul rând ca urmare a simetriei de reflexie în raport cu o axă verticală. Dar apoi a venit surpriza. Când observatorii și-au înclinat capetele cu 45°, au continuat să aleagă figura 28c drept cea mai asemănătoare cu figura 28a, în ciuda faptului că în această orientare nici 28b, nici 28c nu-și păstrau simetria verticală în imaginea formată pe retină. Din acest experiment, dar și din altele, Rock a tras concluzia că „perceperea unei figuri noi nu este mult afectată de simpla modificare a orientării imaginii ei pe retină". El a considerat că ceea ce contează cu adevărat nu este orientarea figurii în ambianța ei, ci faptul că noi le atribuim figurilor direcțiile sus, jos, stânga, dreapta. Aceste atribuiri depind de regulă de alte informații primite pe cale vizuală, cum sunt direcția forței de gravitație și sistemul de referință al mediului înconjurător. Figurile incorect orientate în raport cu direcțiile prestabilite de noi sunt greu de recunoscut. Lucru interesant, Rock a constatat că efectul asupra formei percepute este minimal atunci când singura schimbare efectuată este o inversare stânga–dreapta. Aceste rezultate confirmă mai departe importanța covârșitoare a simetriei bilaterale în percepție. Rock a recunoscut totuși că anumite forme, cum ar fi cuvintele scrise cursiv sau portretele, devin foarte greu de recunoscut chiar dacă nu se schimbă decât orientarea imaginii de pe retină.

Figura 29

Deși simetria acționează de cele mai multe ori ca un adjuvant al percepției, un anumit tip de simetrie poate determina ochii să interpreteze greșit ceea ce văd. Fizicianul scoțian David Brewster (1781–1868), care a inventat și caleidoscopul în 1816, a remarcat ceva straniu contemplând un tapet cu motiv repetat, ce prezenta o simetrie de translație. Productivitatea firmei Morris and Company, dar și a altora din acea perioadă, făcea ca asemenea motive să fie pretutindeni întâlnite în epoca victoriană. Spre uimirea sa, Brewster a descoperit că unele dintre formele desenate „sar" efectiv de pe perete și devin iluzii tridimensionale, cunoscute acum drept *iluzii de tapet* sau *de scară rulantă,* deoarece atât tapetele, cât și scările rulante au configurații ce se repetă. Sunteți probabil deja familiarizați cu acest fenomen din numeroasele cărți și postere de tip Ochiul Magic. Fascinația pentru aceste *autostereograme* generate pe calculator[17] – configurații care sar în tridimensionalitate atunci când sunt privite cu ochii încrucișați – a atins magnitudinea unei

epidemii la începutul anilor ’90. Figura 29 ilustrează acest efect surprinzător. Dacă o fixați circa un minut focalizându-vă privirea ca și cum ați privi o imagine din spatele paginii, surferii se vor materializa în mod miraculos ca entități tridimensionale. Din motive nu foarte clare, unii oameni nu pot percepe iluziile create de autostereograme. Așa că, dacă figura 29 nu capătă brusc profunzime pentru dumneavoastră, nu disperați; aparțineți unui club exclusivist. Ideea din spatele iluziilor de tip Ochiul Magic s-a născut din cercetările psihologului ungaro-american Bela Julesz, făcute în 1959 asupra percepției profunzimii. Colaboratorul lui Julesz, psihologul Christopher Tyler de la Smith-Kettlewell Eye Research Institute, a descoperit în 1979 că putea folosi o tehnică de tipărire *offset* pentru a genera stereograme cu o singură imagine. Explicația magiei elementelor repetate e simplă. Cu fiecare ochi fixat asupra unui alt element al unei perechi de forme geometrice adiacente din motivul repetat, creierul percepe în mod eronat cele două elemente ca fiind unul singur, aflat la o altă distanță (figura 30). Cauza „erorii“ creierului este, bineînțeles, faptul că motivele repetate creează imagini identice pe cele două retine, dând impresia focalizării privirii pe un singur obiect.

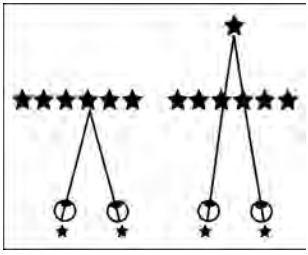


Figura 30

Când configurația repetată este restrânsă într-un spațiu mic și constă din motive cu mare contrast cromatic, ea poate produce o foarte puternică iluzie de mișcare. Artista britanică Bridget Riley, reprezentantă a curentului *Op*, a uimit mulți admiratori cu o asemenea configurație halucinantă, prezentată în tabloul ei *Cădere* (figura 31).

Cu excepția permutărilor și a principiului excluziunii, formulat de Pauli, până acum n-am prezentat decât simetrii de forme și configurații. Ele au fost simetrii ale unor obiecte din spațiu, impuse de dispunerea anumitor elemente constitutive și percepute prin simțuri. Putem *vedea* că o catedrală are simetrie bilaterală, că motivele unui tapet prezintă simetrie de translație și că un

cerc are simetrie de rotație. Simetriile care stau la baza legilor fundamentale ale naturii se înrudesc cu cele pomenite anterior, dar în loc să pună accentul pe formă sau aspect exterior, ele îl pun pe întrebarea: Ce operații pot fi efectuate asupra lumii din jurul nostru, așa încât legile ce descriu toate fenomenele observate să rămână neschimbate?

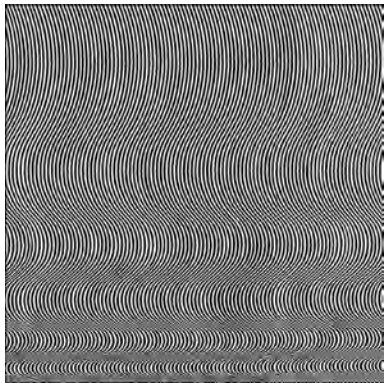


Figura 31

Regulile jocului

Care sunt legile naturii? Biologul Thomas Henry Huxley[18] (1825–1895), cel mai aprig apărător al teoriei darwiniene a evoluției și selecției naturale, a oferit următoarea explicație:

> Tabla de șah este lumea, piesele sunt fenomenele universului, regulile jocului sunt ceea ce noi numim legile Naturii. Jucătorul de pe cealaltă parte stă ascuns. Știm că jocul lui este totdeauna corect, normal, perseverent. Dar mai știm și că, spre dauna noastră, el nu trece niciodată cu vederea vreo greșeală și nici nu face vreo concesie cât de mică ignoranței.

Această definiție, aparținând omului care fusese poreclit „Bulldogul lui Darwin", este lipsită de ambiție după standardele moderne. Fizicienii din ziua de azi ar vrea ca legile naturii să nu reprezinte numai regulile jocului, ci să explice, în plus, existența și proprietățile tablei de șah, dacă nu chiar și a pieselor!

Până în secolul al XVII-lea, oamenii nici n-au visat măcar să dispună de un corp de legi care să explice orice. Galileo Galilei (1564–1642), René Descartes (1596–1650) și mai ales Isaac Newton (1642–1727) au demonstrat pentru prima oară că o mână de legi (cum sunt legile mișcării și ale gravitației)

putea explica o abundență de fenomene, mergând de la căderea merelor și de la mareele de pe coaste, până la mișcarea planetelor.

Alții au călcat pe giganticele lor urme. În 1873, fizicianul scoțian James Clerk Maxwell (1831–1879) și-a publicat *Tratatul despre electricitate și magnetism* – o lucrare monumentală, ce unifica toate fenomenele electrice, magnetice și luminoase sub umbrela a numai patru ecuații matematice. Plecând de la rezultatele experimentale ale fizicianului englez Michael Faraday (1791-1867), Maxwell a reușit să demonstreze că, așa cum forța care menține planetele pe orbitele lor și cea care reține obiectele pe suprafața Pământului sunt una și aceeași, electricitatea și magnetismul nu reprezintă decât manifestări diferite ale aceluiași fenomen fizic. Secolul al XX-lea a fost martorul nu a uneia, ci a două revoluții științifice majore. În primul rând, teoriile relativității restrânse și generalizate ale lui Einstein au schimbat pentru totdeauna semnificația spațiului și timpului. Aceste două concepte au devenit inextricabil legate în entitatea cunoscută acum drept *spațiu-timp*. Relativitatea generalizată a mai sugerat că gravitația nu este o forță misterioasă care acționează de la distanță, ci pur și simplu o manifestare a dimensiunii spațiu-timp, care este curbată de materie precum o foaie de cauciuc ce se deformează sub greutatea unui obuz. Orice obiect care se mișcă prin acest spațiu curbat – cum sunt planetele în cursa lor – nu urmează traiectorii drepte, ci curbe. În al doilea rând, pe un front diferit, toată speranța într-o lume complet deterministă a fost zdruncinată odată cu introducerea *mecanicii cuantice*. În mecanica newtoniană, și chiar în relativitatea generalizată, dacă ajungeai să cunoști atât poziția fiecărei particule din univers la un anumit moment dat, cât și viteza și direcția ei de mișcare din acel moment, puteai simultan să prezici în mod neambiguu viitorul universului și să spui întreaga istorie a cosmosului. Singurele neajunsuri ar fi apărut în rarele ocazii în care relativitatea generală dă greș, ca în cazul corpurilor cerești ajunse în fază de colaps, cunoscute sub denumirea de găuri negre. Mecanica cuantică a schimbat situația. Nici măcar poziția și viteza unei singure particule nu poate fi determinată cu precizie. Singurele lucruri care pot fi determinate

în univers sunt probabilitățile diverselor rezultate, nu rezultatele însele. Deși din motive diferite, universul seamănă oarecum cu vremea – cel mai bun lucru pe care-l putem face este să prezicem probabilitatea ca mâine să plouă, nu să spunem cu certitudine că va ploua sau nu. Dumnezeu joacă într-adevăr zaruri.

Cu fiecare pas făcut înspre revoluțiile relativității și mecanicii cuantice, rolul simetriei în legile naturii a devenit tot mai apreciat. Fizicienii nu se mai mulțumesc să găsească explicații ale unor fenomene individuale, ci sunt acum mai convinși ca oricând că natura are un plan ascuns, în care simetria deține un rol-cheie. O simetrie a legilor[19] presupune ca observarea fenomenelor naturii din diferite puncte de vedere să ne conducă la concluzia că respectivele fenomene sunt guvernate de exact aceleași legi ale naturii. Bunăoară, atunci când efectuăm experimente la New York, Tokio sau la celălalt capăt al Căii Lactee, legile naturii care explică rezultatele acestor experimente trebuie să rămână neschimbate. Observați că simetria legilor nu presupune neapărat rămânerea neschimbată a rezultatelor experimentelor. Intensitatea gravitației pe Lună e diferită de cea de pe Pământ, motiv pentru care astronauții ajunși acolo au fost văzuți sărind mai sus decât ar fi făcut-o pe planeta noastră. Dar dependența intensității atracției gravitaționale de masa și raza Lunii este aceeași ca dependența gravitației Pământului de propria lui masă și rază. Această simetrie a legilor – imunitatea față de schimbări la o deplasare dintr-un loc în altul – este de translație. Fără ea, universul ar fi fost efectiv imposibil de înțeles. Principalul motiv pentru care noi putem interpreta relativ ușor observațiile făcute asupra galaxiilor de la zece miliarde de ani-lumină depărtare este că atomii de hidrogen se supun exact acelorași legi ale mecanicii cuantice ca cei de pe Pământ.

Legile naturii sunt simetrice și în cazul rotației. Fizica nu are nici o direcție preferențială în spațiu – descoperim aceleași legi indiferent dacă stăm drepți sau înclinați ori dacă apreciem direcțiile în funcție de cele stabilite convențional de noi: sus, jos, nord sau sud-vest. Lucrul acesta e mai puțin intuitiv decât credeți. Vă reamintesc că pentru ființele care au evoluat pe suprafața Pământului există o distincție clară între sus și jos. Aristotel și adepții săi credeau că obiectele cad jos deoarece

aceasta este poziția naturală a lucrurilor grele. Newton, evident, a dovedit că sus și jos ni se par diferite nu fiindcă legile fizicii depind de ele, ci fiindcă se întâmplă să simțim atracția gravitațională a acestei mase relativ mari pe care o numim Pământul de sub picioarele noastre. Aceasta e o schimbare a ambianței, nu a legii. Într-un fel suntem norocoși – simetriile de translație și rotație ne asigură că, indiferent unde ne-am găsi în spațiu sau oricum am fi orientați, vom descoperi aceleași legi.

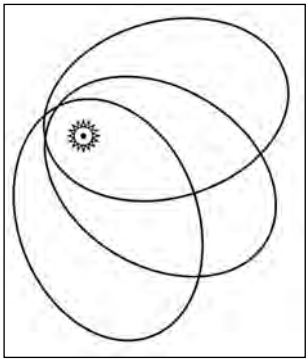


Figura 32

Un exemplu simplu ne poate ajuta să clarificăm și mai mult deosebirea dintre simetriile formelor și cele ale legilor. Vechii greci credeau că orbitele planetelor trebuie să fie circulare, deoarece această formă geometrică este simetrică cu orice unghi ar fi rotită. În schimb, simetria de rotație a legii newtoniene a gravitației ar presupune ca orbitele să poată avea orice orientare în spațiu (figura 32). Orbitele nu trebuie să fie circulare; ele pot fi, și chiar sunt, eliptice.

Mai există și alte simetrii, mai ezoterice, care lasă invariante legile naturii; vom reveni asupra câtorva dintre ele și a importantelor lor implicații în Capitolul 7. Lucrul esențial pe care-l avem de reținut este însă acela că simetria este unul dintre cele mai importante instrumente în descifrarea structurii naturii.

Până acum, rapida noastră trecere în revistă a simetriilor, fie ale obiectelor, fie ale legilor naturii, a fost precum cea a unor turiști aflați într-o țară străină. Am putut admira peisajul, dar pentru a înțelege mai profund cultura, trebuie să învățăm limba. Este deci momentul unui curs rapid de tip Berlitz.

Mama tuturor simetriilor

Deși scurtă, privirea aruncată până acum în universul simetriilor ne ajută să vedem clar că ele stau exact la intersecția dintre știință, artă și psihologia percepției. Simetria, în general, este

esența formelor, legilor și obiectelor matematice care rămân neschimbate prin transformări. Limbajul care o descrie trebuie să indentifice această esență invariantă chiar și atunci când ea se ascunde sub diverse travestiuri disciplinare.

Limbajul financiar, bunăoară, este unul al operațiilor aritmetice. Dacă vreți să comparați dintr-o privire puterile economice a două companii, nu e nevoie să citiți volume întregi de teorie; e suficientă compararea câtorva cifre-cheie. Când Isaac Newton și-a formulat celebrele lui legi ale mișcării, el a dezvoltat și limbajul analizei matematice pentru a fi capabil să le exprime și să le manipuleze. Se poate afirma că una dintre performanțele artei abstracte și non-obiectuale a secolului XX a fost transformarea culorii într-un limbaj al semnificației și emoției. Unii pictori au abandonat aproape în întregime forma în favoarea comunicării exclusive prin culoare.

Pentru a explora labirinturile simetriei, matematicienii, savanții și artiștii își luminează calea cu limbajul *teoriei grupurilor*. Asemenea unui club exclusivist, grupul matematic cuprinde niște membri care trebuie să asculte de anumite reguli. O *mulțime* matematică este orice ansamblu de entități, fie că e vorba de componentele unui avion demontat, de literele alfabetului ebraic sau de o colecție bizară, constând din urechea lui van Gogh, iepurașul de Paște, toate ziarele albaneze și datele meteorologice de pe Marte. Pe de altă parte, un *grup* este o mulțime care trebuie să asculte de anumite reguli, supuse unei legi de compoziție. De exemplu, unul din cele mai familiare grupuri este cel al tuturor numerelor întregi (pozitive, negative și zero; adică …−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4,…), cărora li se asociază simpla operație de adunare, aceasta reprezentând legea de compoziție.

Proprietățile care definesc un grup sunt:

1. *Închiderea.* Rezultatul obținut prin compunerea (prin intermediul operației asociate) oricăror două elemente trebuie să fie el însuși un element al mulțimii. În grupul numerelor întregi, suma oricăror două numere este și ea un număr întreg (de ex.: 3 + 5 = 8).

2. *Asociativitatea*. Operația trebuie să fie asociativă – dându-se trei membri dispuși într-o anumită ordine, îi puteți compune (prin intermediul operației) mai întâi pe oricare doi dintre ei, iar rezultatul este același, indiferent de modul în care sunt puse parantezele. Adunarea, de exemplu, este asociativă: (5 + 7) + + 13 = 25 și 5 + (7 + 13) = 25, unde parantezele, „semnele de punctuație" ale matematicii, indică perechea pe care o adunați mai întâi.
3. *Elementul neutru*. Grupul trebuie să conțină un „element neutru" care, atunci când este compus cu orice membru, îl lasă neschimbat. În grupul numerelor întregi, elementul neutru este zero. De exemplu, 0 + 3 = 3 + 0 = 3.
4. *Elementul simetric*. Pentru orice element al grupului trebuie să existe un element simetric. Atunci când elementul este compus cu simetricul său, rezultă elementul neutru. Pentru numerele întregi, simetricul oricărui element are aceeași valoare absolută, dar semn opus: de exemplu, simetricul lui 4 este – 4, iar simetricul lui – 4 este 4; 4 + (– 4) = 0 și (– 4) + 4 = 0.

Faptul că această definiție simplă poate conduce la o teorie care îmbrățișează și unifică toate simetriile din lumea noastră continuă să-i uimească până și pe matematicieni. Așa cum s-a exprimat cândva geometrul englez Henry Frederick Baker (1866–1956): „Ce belșug, ce măreție de gândire pot izvorî din începuturi atât de mărunte!" Teoria grupurilor[20] a fost numită de cunoscutul matematician James R. Newman „arta supremă a abstracției matematice". Ea își trage incredibila forță din flexibilitatea intelectuală oferită de definiția sa. Așa cum vom vedea în capitolele ulterioare ale cărții, elementele unui grup pot fi reprezentate de orice, de la simetriile particulelor elementare ale universului sau diversele amestecuri ale unui pachet de cărți de joc, până la simetriile unui triunghi echilateral. Iar legea de compoziție asociată elementelor poate fi simplă, precum adunarea (vezi în exemplul precedent) sau ceva mai complicată, precum „urmată de", pentru operația ce indică două transformări de simetrie (cum ar fi o rotație cu un anumit unghi, urmată de o rotație cu un alt unghi).

Teoria grupurilor explică ce se întâmplă atunci când diverse transformări, cum ar fi rotația și reflexia, sunt aplicate succesiv

unui element particular sau când o operație particulară (cum este adunarea) combină între ele diverse elemente (cum ar fi numerele). Acest tip de analiză pune în lumină structurile fundamentale ale matematicii. Ca urmare, atunci când analiștii pieței de mărfuri sau fizicienii particulelor elementare întâlnesc niște dificultăți aparent de netrecut în recunoașterea configurațiilor, ei se pot folosi eventual de formalismul teoriei grupurilor pentru a traversa granițele interdisciplinare și a împrumuta instrumente dezvoltate în alt domeniu pentru probleme similare.

Pentru a ne face o idee despre relația dintre teoria grupurilor și simetrii, să începem cu un caz simplu, al simetriilor corpului uman. Oamenii rămân aproape neschimbați doar la două transformări de simetrie. Una este cea identică, aceasta lăsând totul așa cum este și constituind deci o simetrie bine definită. A doua este cea de reflexie față de un plan vertical – simetria (aproximativ) bilaterală. Să folosim simbolul *I* pentru a nota transformarea identică și simbolul *r* pentru a nota reflexia. Mulțimea tuturor transformărilor de simetrie ale corpului uman are deci numai două elemente: *I* și *r*. Ce se întâmplă dacă aplicăm succesiv aceste transformări? O reflexie urmată de o transformare identică nu diferă de o simplă reflexie. Simbolic, putem exprima aceasta sub forma: $I \circ r = r$, unde simbolul o înseamnă „urmat de". De observat că ordinea transformărilor este totdeauna inversă, cea din partea dreaptă a simbolului aplicându-se prima. Așadar, $a \circ b \circ c$ înseamnă că *c* a fost aplicată întâi, urmată de *b* și apoi de *a*.

Aplicarea succesivă a două reflexii readuce imaginea corpului uman la forma inițială, deoarece prima schimbă între ele stânga și dreapta, iar cea de-a doua le schimbă la loc. Aplicarea unui *r* urmat de un *r* este deci echivalentă cu aplicarea unei transformări identice I: $r \circ r = I$.

Putem încerca acum să construim un fel de tablă a înmulțirii pentru cele două simetrii, în care elementul de pe linia *I* și cel de pe coloana *r* este $I \circ r$ și așa mai departe. Cuvântul *înmulțire* este folosit aici în sens larg, pentru a desemna operația dintre transformări (în acest caz, „urmat de").

∘	***I***	***r***
I	*I*	*r*
r	*r*	*I*

Tabla înmulțirii dezvăluie un adevăr important: *Mulțimea tuturor transformărilor de simetrie ale corpului uman este un grup*! Să verificăm că toate proprietățile definitorii ale unui grup sunt, într-adevăr, satisfăcute:

1. *Închiderea.* Tabla înmulțirii demonstrează că rezultatul compunerii oricăror două transformări de simetrie este tot o transformare de simetrie. Dacă vă gândiți bine, faptul nici nu este surprinzător. Cum oricare din cele două transformări lasă imaginea neschimbată, aplicarea lor succesivă va avea același efect.
2. *Asociativitatea.* Ea este clar satisfăcută, deoarece este adevărată pentru orice trei operații de acest fel, combinate prin „urmată de". Atunci când aplicăm, de exemplu, $I \circ r \circ r$, nu are nici o importanță cum punem parantezele.
3. *Elementul neutru.* Transformarea identică este o transformare de simetrie.
4. *Elementul simetric.* Tabla înmulțirii arată că fiecare din cele două transformări (cea identică și reflexia) este propriul ei element simetric – aplicând succesiv pe oricare din ele, obținem elementul neutru, reprezentat de transformarea identică: $I \circ I = I$ și $r \circ r = I$.

Grupul simetriilor corpului omenesc nu conține decât două elemente, dar asocierea pe care am descoperit-o între simetrii și grupuri este extrem de importantă. Pentru a alege un exemplu ceva mai complicat, examinați forma celor trei picioare din figura 33. Aceasta este emblema insulei engleze Man, din Marea Irlandei.

Acestei forme îi corespund trei transformări de simetrie: (1) rotația cu 120° în jurul centrului; (2) rotația cu 240°; (3) transformarea identică (sau rotația cu 360°). De observat că figura nu este simetrică față de nici un fel de reflexie, deoarece reflexiile fac ca picioarele să fie direcționate în sens greșit. Rotația de 120° poate fi notată cu *a*, cea de 240°, cu *b*, iar

Figura 33

transformarea identică, cu I; să examinăm din nou ce se întâmplă când compunem transformările de simetrie prin operația „urmată de" (desemnată prin simbolul o). Dacă rotim cu 120° și iarăși cu 120°, obținem o rotație de 240°, ceea ce înseamnă că $a \circ a = b$. Analog, dacă rotim de două ori cu 240°, rezultatul este același ca și cum am fi rotit cu 120°, deoarece 480° constă dintr-o rotație completă (360° = transformarea identică), plus 120°. Avem deci $b \circ b = a$. În sfârșit, o rotație de 120° urmată de o rotație de 240° (sau invers) duce la o rotație de 360°, adică la o transformare identică: $b \circ a = a \circ b = I$. Suntem acum în situația de a putea completa „tabla înmulțirii":

∘	***I***	***a***	***b***
I	*I*	*a*	*b*
a	*a*	*b*	*I*
b	*b*	*I*	*a*

Am descoperit că mulțimea transformărilor de simetrie ale celor trei picioare formează și ea un grup. Tabla demonstrează închiderea, iar transformările a și b sunt, fiecare, elementul simetric al celeilalte – aplicarea lor una după alta readuce imaginea în poziția inițială, reprezentând deci transformarea identică.

Poate că începeți să realizați că grupurile vor fi nelipsite oriunde avem de-a face cu simetrii. În fapt, *mulțimea tuturor transformărilor de simetrie ale oricărui sistem formează totdeauna un grup*. Lucrul acesta este ușor de înțeles. Dacă A este o transformare de simetrie, adică aplicarea sa lasă sistemul neschimbat, iar B este o altă transformare de simetrie, atunci e clar că $A \circ B$ (B urmat de A) are aceeași proprietate. De asemenea, oricărei transformări îi corespunde una simetrică,

realizată în sens invers, care readuce lucrurile în starea lor inițială. Așa cum vom vedea în cele ce urmează, forțele unificatoare ale teoriei grupurilor sunt atât de uimitoare, încât Eric Tempell Bell (1883–1960), care s-a ocupat de istoria matematicii, a făcut odată următorul comentariu: „Ori de câte ori grupurile s-au manifestat sau au putut fi introduse, simplitatea s-a cristalizat din haos."

Spre deosebire de majoritatea descoperirilor matematice, atunci când a fost descoperit acest concept, nimeni nu căuta vreo teorie a grupurilor sau măcar a simetriilor. Dimpotrivă; teoria grupurilor a apărut oarecum din senin, dintr-o căutare de milenii a soluției unei ecuații algebrice. Meritându-și descrierea de concept ce cristalizează simplitatea din haos, teoria grupurilor s-a născut ea însăși din una dintre cele mai tumultuoase povești din istoria matematicii. Aproape patru mii de ani de curiozitate și luptă intelectuală, presărați cu intrigi, mizerie și persecuții, au culminat, în secolul al XIX-lea, cu crearea acestei teorii. Uimitoarea poveste, istorisită în următoarele trei capitole, a început odată cu zorii matematicii, pe malurile Nilului și ale Eufratului.

3
Să nu uitați niciodată acest lucru când vă cufundați printre ecuațiile voastre

Într-un discurs intitulat „Știință și Fericire“[1], prezentat la California Institute of Technology pe 16 februarie 1931, Albert Einstein remarca: „Preocuparea pentru om și soarta sa trebuie să constituie totdeauna obiectivul principal al tuturor eforturilor tehnologice… așa încât creațiile minții noastre să fie o binecuvântare, nu un blestem pentru omenire. Să nu uitați niciodată de acest lucru când vă cufundați printre diagramele și ecuațiile voastre.“ Nici Einstein însuși nu-și putea imagina cât de profetic avea să devină avertismentul lui după mai puțin de un deceniu, în timpul întunecatelor zile ale celui de-al Doilea Război Mondial și al ororilor Holocaustului. Istoria ecuațiilor matematice a început țintind însă numai spre binele omenirii. Primele persoane care le-au dat atenție n-au încercat nimic mai mult decât să răspundă unor nevoi cotidiene concrete.

„Us“ și „Aha“

Cândva, prin al patrulea mileniu înainte de Cristos, în Mesopotamia, țara dintre Tigru și Eufrat, au luat naștere primele comunități urbane sumeriene. Aproape o jumătate de milion de tăblițe cuneiforme și alte obiecte arheologice găsite în această zonă ne spun povestea unei societăți cu agricultură organizată, cu arhitectură impresionantă și cu o vibrantă istorie politică și culturală. Atunci, ca și astăzi, această țară fertilă era expusă invaziilor, rezultatul fiind o frecventă schimbare a populațiilor dominante. La câteva secole după ce au fost înfrânți de regele akkadian Sargon I (cca 2276–2221 î.Cr.), amoriții

semiți au preluat țara Sumerului și și-au stabilit capitala în orașul comercial Babilon. În consecință, pentru perioada cuprinsă aproximativ între anii 2000 și 600 î.Cr., cultura întregii regiuni este numită în mod convențional „babiloniană". Evoluția rapidă a societății babiloniene a pretins ținerea unor evidențe clare ale resurselor și distribuției de bunuri. De asemenea, a fost necesară dezvoltarea unor instrumente de calcul pentru tranzacții economice, împărțirea loturilor agricole și redactarea testamentelor. În acest scop, babilonienii au dezvoltat cea mai sofisticată matematică a acestei epoci. Registrele contabile de pe tăblițele cuneiforme arată că ei stăpâneau o varietate de artificii matematice și anticipau, literalmente, algebra mai avansată. Aici mă voi concentra doar asupra apariției „ecuațiilor", deoarece numai ele sunt relevante pentru istoria teoriei grupurilor. Motivul pentru care am pus cuvântul *ecuații* între ghilimele este că babilonienii nu foloseau acest concept[2] în același fel în care o facem noi astăzi, ci formulau și rezolvau problemele pe cale retorică, folosind limbajul obișnuit. Cu alte cuvinte, problemele erau rezolvate prin instrucțiuni verbale precise; nu au fost identificate scheme logice sau formule care să indice vreo procedură generală.

Este neîndoielnic că problemele matematice au fost formulate inițial în contextul nevoii societății de a împărți loturile de pământ. Cuvintele folosite pentru necunoscutele care trebuiau determinate erau *us* (lungime), *sag* (lățime) și *asa* (arie), chiar atunci când nu se efectua nici o măsurare.

Cele mai simple ecuații sunt cele *liniare* (ele sunt reprezentate grafic prin linii drepte). Într-o notație modernă, acestea sunt ecuații de tipul $2x + 3 = 7$, unde x reprezintă necunoscuta. A rezolva o ecuație înseamnă a găsi valoarea lui x pentru care ecuația este satisfăcută (în exemplul de mai sus, soluția este $x = 2$, deoarece $2 \times 2 + 3 = 7$). Mai multe tăblițe conțin probleme care pot fi rezolvate prin intermediul ecuațiilor liniare.

Uneori, pentru a afla răspunsul, trebuia găsită valoarea a două necunoscute. De exemplu, una dintre probleme cere determinarea lățimii și lungimii pentru cazul în care adunând un sfert din lățime cu lungimea obținem 7 mâini (o unitate de

lungime), iar lungimea cu lățimea, 10 mâini. Folosind algebra învățată la școală, dacă notăm lungimea cu *x* și lățimea cu *y*, problema se traduce printr-un sistem de două ecuații: 1/4y + + x = 7, x + y = 10. Scribul babilonian notează corect că o lungime de 6 mâini (sau 30 de degete, o mână fiind echivalentă cu 5 degete) și o lățime de 4 mâini (20 de degete) satisfac ambele ecuații (în Anexa 2, prezint cititorului interesat, pe scurt, modul în care se rezolvă asemenea sisteme de ecuații.)

Ecuațiile liniare au apărut încă și mai proeminent în matematica vechiului Egipt. Aparent, babilonienii le găseau prea elementare pentru a merita o documentare detaliată. Mare parte din cunoștințele noastre asupra matematicii egiptene[3] provine din fascinantul Papirus Ahmes. Acest imens papirus (lung de aproape cinci metri și jumătate) este păstrat în prezent la British Museum (cu excepția câtorva fragmente, descoperite în mod neașteptat într-o colecție de lucrări medicale de la Brooklyn Museum). Papirusul a fost cumpărat de egiptologul scoțian Alexander Henry Rhind în 1858 și, ca urmare, este deseori numit Papirusul Rhind (figura 34). După mărturia scribului Ahmes, el a copiat papirusul cam prin 1650 î.Cr., după un document original care fusese scris cu câteva sute de ani înainte (în timpul domniei faraonului Ammenemes al III-lea din a 12-a dinastie). Papirusul, descris de cercetătorul britanic D'Arcy Thompson ca fiind „unul dintre monumentele științei antice", conține 87 de probleme. Acestea sunt precedate de un tabel cu „rețete" de împărțire și de o introducere. În introducere, documentul este prezentat oarecum grandilocvent, drept „Intrarea în cunoașterea tuturor lucrurilor existente și a tuturor secretelor obscure". Pe de altă parte, problemele pe

Figura 34

care Ahmes le prezintă și le rezolvă tratează în principal o varietate de chestiuni practice, de la împărțirea echitabilă a pâinilor până la panta piramidelor. Necunoscuta este numită *aha*, care înseamnă „grămadă". De exemplu, problema 26 caută valoarea lui *aha,* dacă suma dintre *aha* și sfertul său este 15. În notație modernă, ecuația s-ar formula $x + 1/4x = 15$, a cărei soluție este, așa cum Ahmes găsește în mod corect, $x = 12$.

Nu toate problemele din Papirusul Ahmes tratează chestiuni arzătoare ale vremii. Unele erau clar introduse ca exerciții pentru învățăcei, și cel puțin una a fost aleasă pur și simplu pentru farmecul ei. Problema 79 sună așa[4]: „Case 7, Pisici 49, Șoareci 343, Spice de grâu 2401, *Hekati* 16 807, Total 19 607." Evident, un Ahmes jucăuș pune aici o problemă de matematică distractivă, care spune că în fiecare dintre cele șapte case există câte șapte pisici, fiecare mâncând câte șapte șoareci, care, la rândul lor, au mâncat câte șapte spice de grâu, ce ar fi furnizat șapte *hekati* (măsuri) de boabe. Necunoscuta căutată în această problemă este totalul, care, fiind suma tuturor caselor, pisicilor, șoarecilor, spicelor și *hekatilor*, nu are, evident, nici o valoare practică. Mulți au speculat că această foarte încurcată șaradă s-ar fi metamorfozat peste secole în alte două, foarte cunoscute. În 1202, faimosul matematician italian Leonardo da Pisa (poreclit Fibonacci; a trăit cam între 1170 și 1240) a publicat o carte intitulată *Liber abaci* (*Cartea Abacului*). În această carte, el pune următoarea problemă: „Șapte bătrâne călătoresc spre Roma, și fiecare are șapte catâri. Pe fiecare catâr sunt șapte saci, în fiecare sac sunt șapte pâini, în fiecare pâine sunt șapte bricege și fiecare briceag are șapte tocuri. Găsiți totalul lor."

După încă o jumătate de mileniu, în culegerea de cântecele pentru copii din secolul al XVIII-lea, *Mama Gâscă*[5], găsim:

Spre St. Ives mergând mai ieri
Întâlnii șapte muieri.
Fiece muiere căra șapte saci,
În fiece sac dormeau șapte mâțe,
Fiecare mâță avea șapte pui;
Pui, pisici, saci și muieri,
Câți mergeau spre St. Ives ieri?

Să fi fost oare acest cântecel inspirat de Papirusul Ahmes, cu peste trei mii de ani mai vechi decât el? Greu de crezut. Dar înainte de a ne îndepărta de subiectul cântecelului, observați că, în funcție de interpretare, răspunsul corect este fie unu (povestitorul; toți ceilalți *veneau* de la St. Ives), fie nici unul (povestitorul neaparținând grupului de „pui, pisici, saci și muieri"). Seriile geometrice de acest tip, în care fiecare termen succesiv este înmulțit cu același factor, i-au fascinat dintotdeauna pe oameni. În plus, valorile spirituale au fost asociate cu numărul șapte atât în tradiția orientală, cât și în cea occidentală (de exemplu, cele șapte zile ale săptămânii, cei șapte zei ai norocului, din Japonia, cele șapte păcate capitale). Cele trei probleme de enigmistică ar putea să fi fost deci creațiile independente a trei creiere pline de imaginație, despărțite prin secole.

Cunoștințele legate de rezolvarea ecuațiilor liniare nu au aparținut exclusiv Orientului Mijlociu. Impresionanta culegere chinezească *Nouă Capitole asupra Artei Matematice*[6] (*Jiu zhang suan shu*) a fost alcătuită cândva între 206 î.Cr. și 221 d.Cr., fiind bazată pe o alta, încă și mai veche. În capitolul 8 al ei, găsim probleme conținând nu mai puțin de trei ecuații cu trei necunoscute, toate strălucit rezolvate.

Următoarea treaptă de dezvoltare în ceea ce privește complexitatea ecuațiilor algebrice este reprezentată de *ecuațiile pătratice.* Dificultatea suplimentară se datorează faptului că, în asemenea ecuații, necunoscuta x apare ridicată la pătrat, ca în $3x^2 + x = 4$. Pentru un novice, aceasta poate să nu pară o schimbare radicală, dar în fapt ecuațiile pătratice sunt mai dificil de rezolvat decât cele liniare. Oricât de incredibil ar fi, subiectul ecuațiilor, în general, și al celor pătratice, în particular, a devenit în 2003 tema unei dezbateri a parlamentului britanic. Într-un strălucitor discurs asupra programei școlare, deputatul Tony McWalter[7] a explicat:

> De ce-ar trebui cineva să fie pasionat de x-ii și y-ii unui sistem de ecuații? Unul dintre răspunsuri este acesta: deoarece, dacă nu face efortul de a vedea ce ascund acești *icși și igreci*, îi va fi cu neputință să înțeleagă cu adevărat știința… De ce-ar trebui orice om să încerce să înțeleagă ecuațiile pătratice și

principiile care stau în spatele rezolvării lor? Ele străbat întreaga știință modernă, la fel ca metodele de turnare ale romanilor, au fost cheia artei de care au dat dovadă aceștia în domeniul construcțiilor.

Totuși, s-ar putea să vă întrebați: Dar oare cine au fost primii care s-au izbit de nevoia rezolvării unor astfel de ecuații?

Protectorii publicului

În codul ebraic al legilor civile și canonice – Talmudul – găsim povestea unui exilarh pus să plătească o compensație uriașă. Trebuia să umple cu cereale un grânar cu dimensiunile bazei de 40 pe 40. Disperat, omul s-a dus la rabinul Huna[8] (cca 212–297 d.Cr.), capul Academiei Sura din Babilon, pentru a-i cere sfatul. Învățatul i-a spus: „Convinge-i să le plătești în două rate: acum o suprafață de 20 pe 20, iar ceva mai târziu alți 20 pe 20, și vei câștiga o jumătate.“ Aria unui pătrat cu latura de 40 de unități este, firește, de $40 \times 40 = 1\,600$ de unități pătrate, în vreme ce suma ariilor a două pătrate cu latura de 20 de unități este de numai 800 de unități pătrate. Rabinul Huna se folosește aici de o greșeală obișnuită în timpul Antichității – ideea că aria unei figuri depinde numai de perimetru. Istoricul grec Polibiu[9] (cca 207–125 î.Ch.), bunăoară, ne povestește că mulți oameni din vremea sa refuzau să creadă că Sparta, cu un zid înconjurător de 48 de stadii*, putea să aibă o suprafață dublă față de Megalopolis, cu un perimetru de 50 de stadii. Figura 35 demonstrează simplu că o figură cu un perimetru mai mic poate avea arie mai mare. Dreptunghiul alungit are un perimetru de $2 \times (100 + 10) = 220$ de unități și o arie de $100 \times 10 = 1\,000$ de unități pătrate. Dreptunghiul

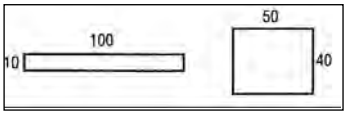


Figura 35

* În Grecia antică, unitate de măsură variabilă, de 177,6 până la aproximativ 192,3 metri (*n. r.*).

mai scurt are un perimetru mai mic, $2 \times (50 + 40) = 180$ de unități, dar arie dublă, $50 \times 40 = 2\,000$ de unități pătrate. Matematicianul grec Proclus (410–485 d.Cr.) relata că până și în secolul al V-lea membrii anumitor comunități își păcăleau concetățenii, dându-le terenuri cu perimetru mai mare, dar arie mai mică decât cele pe care și le alegeau pentru ei. Pentru a adăuga și minciuna la răul făcut, acești impostori își foloseau șmecheria pentru a-și câștiga renumele de oameni generoși.

Să examinăm o clipă pe ce se bazează confuzia dintre perimetru și arie. Să presupunem că avem un dreptunghi cu perimetrul de 18 unități. Dacă notăm lungimea sa cu x, iar lățimea cu y, atunci $x + y = 9$ (perimetrul fiind egal cu suma dintre dublul lungimii și al lățimii). Să mai presupunem că aria este de 20 de unități pătrate. Aceasta înseamnă că $xy = 20$ (aria este produsul dintre lungime și lățime). Avem, deci, un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ xy &= 20. \end{aligned}$$

O cale directă de rezolvare a acestui sistem ar fi prin izolarea necunoscutei y din prima ecuație (scăzându-l pe x din ambii membri), $y = 9 - x$, și înlocuirea acestei expresii a lui y în cea de a doua ecuație, $x(9 - x) = 20$. Dacă desfacem acum paranteza din membrul stâng, obținem $9x - x^2 = 20$. Multe probleme babiloniene ce conduc la ecuații pătratice au, în mare, această formă generală. De exemplu, a doua problemă de pe tăblița numărul 13 901 de la British Museum[10] spune: „Am scăzut latura din aria pătratului meu. 870." Aceasta corespunde ecuației pătratice $x^2 - x = 870$. Una dintre ipoteze este deci că ecuațiile pătratice au apărut ca o încercare a conștiincioșilor babilonieni de a proteja populația de impostori și de șmecheriile hoților de terenuri. Dar cum au descoperit matematicienii lor metoda de rezolvare a ecuațiilor pătratice rămâne un mister, dat fiind că babilonienii descriu totdeauna cu multe detalii pașii procedeului de găsire a soluției, fără a ne spune însă niciodată cum au inventat procedeul.

Vechii egipteni nu puteau rezolva decât cea mai simplă dintre ecuațiile pătratice, de tipul $x^2 = 4$, dar nu și ecuații „mixte",

care îl conțineau atât pe x, cât și pe x^2. Care este soluția ecuației $x^2 = 4$? Ea este rădăcina pătrată a lui 4, notată $\sqrt{4}$. Un răspuns evident este 2, dat fiind că $2 \times 2 = 4$. Aceasta era tot ceea ce-i interesa pe egipteni, căci numărul trebuia să reprezinte cantități, precum lungimile sau numărul de pâini, așa că nu putea fi decât pozitiv. În fapt, ecuația $x^2 = 4$ admite însă și o a doua soluție, mai puțin evidentă: -2. Atunci când un număr negativ se înmulțește cu un alt număr negativ, rezultatul este un număr pozitiv. Cu alte cuvinte, $(-2) \times (-2) = 4$, deci ecuația $x^2 = 4$ are două soluții: $x = 2$ și $x = -2$. Aceasta e prima indicație a faptului că ecuațiile pătratice pot avea două soluții diferite, nu una singură. Deși babilonienii se pricepeau să rezolve ecuații pătratice, ei nu erau încă interesați decât de soluțiile pozitive, deoarece necunoscutele tipice erau lungimile. Ei evitau, de asemenea, cazurile în care puteau fi găsite două soluții pozitive diferite, acestea părându-li-se, pesemne, absurdități ilogice.

În ciuda superbelor lor talente matematice, primii greci s-au concentrat în primul rând la geometrie și logică, nedând prea multă atenție algebrei. Percepția clară a numărului și formei drept două aspecte diferite ale aceluiași domeniu matematic a trebuit să aștepte strălucitele minți matematice ale secolului al XVII-lea î.Cr. Marele Euclid din Alexandria, a cărui monumentală operă *Elementele* (publicată în jur de 300 î.Cr.) a pus bazele geometriei, tratează doar indirect ecuațiile pătratice. El rezolvă ecuațiile pe cale geometrică, formulând metode de găsire a lungimilor, care sunt, de fapt, soluții ale unor ecuații pătratice. Câteva secole mai târziu, matematicienii arabi aveau să dezvolte mai mult acest tip de algebră geometrică[11].

Părinții algebrei

Marea școală grecească din Alexandria a produs mulți matematicieni eminenți, pe parcursul a două epoci de aur. În ciuda multor suișuri și coborâșuri, școala ei (numită Muzeul) și biblioteca asociată, vestită pentru păstrarea a circa șapte sute de mii de volume (multe dintre ele confiscate de la turiști ghinioniști),

au dăinuit timp de aproape șapte sute de ani. Unul dintre cei mai originali gânditori ai Alexandriei a fost Diofant[12], cel supranumit uneori „părintele algebrei". Detaliile vieții lui Diofant sunt atât de învăluite în mister, încât nu știm cu certitudine nici măcar în ce secol a trăit, în afara faptului că trebuie să fi activat aproximativ după anul 150 î.Cr. (dat fiind că îl citează pe matematicianul Hypsicles, care a trăit cam între 180 și 120 î.Cr.) și ceva mai devreme de 270 î.Cr. (deoarece el este menționat de Anatolius, episcopul din Laodicea, care a intrat în funcție cam prin acest an). În general, se presupune că el a ajuns în culmea gloriei în jurul anului 250 î.Cr., deși posibilitatea să fi trăit cu un secol înainte nu poate fi exclusă. Știm despre ingenioasa operă a lui Diofant din principalul său tratat, *Aritmetica,* constituit inițial din treisprezece volume. Numai șase dintre acestea, scrise în limba greacă, au supraviețuit atacului declanșat de musulmani în secolul al VII-lea asupra bibliotecii din Alexandria. O traducere arabă a ceea ce ar putea fi alte patru volume (atribuită matematicianului Qusta Ibn Luqa din secolul al IX-lea) a fost descoperită în mod miraculos în 1969.

În ciuda titulaturii de „părinte al algebrei", cea mai mare parte din *Aritmetica* se ocupă de fapt cu probleme de teoria numerelor. Cu toate acestea, Diofant reprezintă în mod cert un punct de cotitură în evoluția algebrei, între stilul pur retoric al babilonienilor și formele simbolice ale ecuațiilor (de ex., $2x^2 + x = 3$) pe care le folosim noi astăzi. În 1463, matematicianul și astronomul german Johannes Regiomontanus nu-și ascundea admirația[13] pentru *Aritmetica* lui Diofant: „În aceste vechi cărți se ascunde floarea întregii aritmetici, *ars rei et census* (arta „lucrului" și a enumerării; cu referire la ecuații cu necunoscute și la aritmetică), căreia noi îi dăm astăzi denumirea arabă de algebră." Diofant a demonstrat o incredibilă creativitate și pricepere în soluționarea multor probleme. Totuși, el lua în considerare numai răspunsuri pozitive, iar dintre acestea, numai cele care puteau fi exprimate fie ca numere întregi (precum 1, 2, 3…), fie ca fracții (precum 2/3, 4/9, 5/13; împreună, numerele întregi și fracțiile sunt cunoscute ca fiind *numere raționale*). Ca un exemplu de ingeniozitate dat de Diofant,

considerați problema a 28-a din primul său volum[14]: „Găsiți două numere așa încât suma lor și suma pătratelor lor să fie niște numere date.“ Evident, aceasta este o problemă cu două necunoscute (cele două numere). Totuși, Diofant a reușit printr-un truc ingenios să reducă numărul necunoscutelor de la două la una și, astfel, și întreaga problemă, la o ecuație simplă. (Pentru cititorul interesat, soluția lui Diofant este prezentată în Anexa 3.) *Aritmetica* dovedește cât se poate de limpede că Diofant se pricepea să rezolve ecuații pătratice de cele trei tipuri: $ax^2 + bx = c$ (unde a, b, c sunt numere pozitive date, ca în $2x^2 + 3x = 14$); $ax^2 = bx + c$; și $ax^2 + c = bx$. Acestea au fost exact tipurile de ecuații reluate în considerare de matematicienii arabi cu peste cinci secole mai târziu.

Diofant este cunoscut mai ales datorită unei categorii speciale de ecuații, care-i poartă numele – ecuațiile diofantice –, precum și datorită extrem de neobișnuitului său epitaf. Ecuațiile diofantice sunt cu adevărat ciudate prin aceea că, aparent, sunt satisfăcute de orice număr. Să considerăm de pildă ecuația $29x + 4 = 8y$. Care valori ale lui x o satisfac? Dacă alegem, să zicem, $y = 5$, obținem $x = 36/29$. Dacă alegem $y = 1$, obținem $x = 4/29$ etc. Îi putem da lui y o infinitate de valori și, orice valoare am alege, putem găsi un x corespunzător, care satisface ecuația. Ceea ce dă nota caracteristică a ecuațiilor diofantice este că, de fapt, se caută ca ambele soluții x, y să fie întregi (numere precum 1, 2, 3…). Aceasta limitează imediat posibilitățile și le face mult mai greu de găsit. Puteți descoperi o soluție pentru ecuația diofantică de mai sus? (Dacă nu, o găsiți în Anexa 4.)

Cea mai celebră ecuație diofantică din istorie este cea cunoscută prin intermediul Marii Teoreme a lui Fermat[15] – celebra afirmație a lui Pierre de Fermat (1601–1655) – că nu există soluții în numere întregi ale ecuației $x^n + y^n = z^n$, unde n este orice număr mai mare decât 2. Atunci când $n = 2$, există multe soluții (în fapt, o infinitate). De exemplu, $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($9 + 16 = 25$); sau $12^2 + 5^2 = 13^2$ ($144 + 25 = 169$). În mod miraculos, când trecem de la $n = 2$ la $n = 3$, nu există nici un triplet de numere întregi x, y, z care să satisfacă ecuația $x^3 + y^3 = z^3$, lucru adevărat pentru orice valoare a lui n mai mare decât 2.

Într-o manieră cât se poate de potrivită, marginea celui de-al doilea volum al *Aritmeticii*, pe care Fermat îl citea cu nesaț, a fost locul unde el și-a notat extraordinara sa afirmație – pentru a cărei demonstrare a fost nevoie de nu mai puțin de 356 de ani.

O culegere din secolul al VI-lea, cunoscută sub numele de *Antologia Greacă*, conține în jur de șase mii de epigrame. Una dintre ele se presupune că ar face un succint rezumat al vieții lui Diofant:

> Divinitatea îi hărăzi să fie un copil pentru a șasea parte a vieții sale și, adăugând la aceasta o a douăsprezecea parte, îi îmbrăcă obrajii în puf; îi aprinse lumânările căsătoriei după a șaptea parte, iar cinci ani mai târziu îi dărui un fiu. Vai! sărmanul copil născutu-s-a târziu; când împlini măsura jumătății vieții părintelui său, Soarta cea rece-l răpi. După ce-și mângâie jalea timp de patru ani cu știința numerelor, viața-și sfârși.

Diofant însuși a fost probabil jignit cumva de faptul că povestea întregii sale vieți a fost redusă la o simplă ecuație lineară, de un tip care pe el nu-l interesase niciodată. Dacă descrierea este corectă, a trăit până la 84 de ani.

Știind că matematicienii babilonieni, greci și, în particular, cei hinduși ai secolului al VII-lea știau deja să rezolve ecuații pătratice de diverse tipuri, n-ar trebui să ne surprindă că ele fac astăzi parte din algebra elementară. Cea mai generală formă a unei ecuații pătratice este: $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c pot fi orice numere date (doar a nu poate fi zero, deoarece ecuația n-ar mai fi pătratică). Adevărata întrebare este dacă există vreo rețetă sau formulă universală pe care ne putem baza pentru a găsi de fiecare dată soluțiile. S-ar putea să vă mai amintiți din liceu că o astfel de formulă chiar există. Ea este:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

În ciuda aspectului oarecum deconcertant, formula este simplă; atunci când substituim în ea valorile date pentru a, b, c, ne

furnizează imediat valorile lui x care satisfac ecuația. De exemplu, să presupunem că avem de rezolvat ecuația: $x^2 - 6x + 8 = 0$, în care $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$. Tot ceea ce avem de făcut este să dăm aceste valori constantelor *a, b,* și *c* din formulă și găsim cele două soluții posibile: $x = 2$ sau $x = 4$ (simbolul ± din formulă spune să alegem plus pentru a obține o soluție și minus pentru a o obține pe cealaltă).

După declinul și căderea școlii din Alexandria, matematica europeană a părut să fi intrat în hibernare timp de aproape un mileniu. Rolul menținerii în viață a matematicii, și a științei în genere, a fost preluat de India și de lumea arabă. Ca urmare, calea de la Diofant la rezolvarea modernă a ecuațiilor pătratice trece pe la matematicienii neeuropeni. Matematicianul și astronomul indian Brahmagupta[16] (589–670) a reușit să rezolve câteva ecuații diofantice impresionante, precum și niște ecuații pătratice care conțineau pentru prima dată numere negative. Pe acestea, el le-a numit „datorii", realizând faptul că numerele negative apar cel mai frecvent în tranzacții monetare. În același spirit, cele pozitive au primit denumirea de „averi". Regulile de înmulțire sau împărțire a numerelor pozitive și negative au fost, deci, formulate astfel: „Produsul sau raportul a două datorii este o avere; produsul sau raportul dintre o datorie și o avere este o datorie."

Figura 36

Cel care literalmente i-a dat algebrei numele pe care-l poartă acum a fost Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi[17] (cca 780–850; în figura 36 îl puteți vedea reprezentat pe un timbru sovietic). Cartea scrisă de el la Bagdad – *Kitab al-jabr wa al-muqabalah* (*Cartea condensată a restaurării și balanței*) – a fost timp de secole sinonimă cu teoria ecuațiilor. De la unul dintre cuvintele din titlul ei (*al-jabr*) provine termenul de „algebră". Chiar și cuvântul

„algoritm“, folosit pentru a descrie orice metodă specială de rezolvare a unei probleme prin urmarea unei succesiuni de pași procedurali, a rezultat dintr-o distorsionare a numelui lui al-Khwarizmi. Chiar dacă, prin conținutul ei, cartea sa nu avea deosebita calitate de a fi o deschizătoare de drumuri, ea a fost prima care a expus într-o manieră sistematică procedeul de rezolvare a unei ecuații pătratice. Cuvântul *al-jabr*, însemnând „restaurare“ sau „completare“ se referea la mutarea termenilor negativi dintr-un membru al ecuației în celălalt, ca atunci când transformăm ecuația $x^2 = 40x - 4x^2$ (adăugând $4x^2$ în ambii membri) în $5x^2 = 40x$. Atât de mare a fost influența cărții lui al-Khwarizmi, încât și opt sute de ani mai târziu, în măiestritul burlesc al celebrului roman cavaleresc *Don Quijote de la Mancha*, descoperim că felcerul este numit *algebrista*, datorită meseriei sale de „restaurator“ de oameni.

Prima carte care conținea rezolvarea completă a celei mai generale ecuații pătratice a apărut în Europa, abia în secolul al XII-lea. Autorul era matematicianul eclectic Abraham bar Hiyya Ha-nasi[18] (1070–1136; „Ha-nasi“ înseamnă „șeful“), de origine hispano-ebraică. Ca pentru a ne reaminti de originile timpurii ale ecuațiilor pătratice, cartea se intitula: *Hibbur ha-meshihah ve-ha-tishboret* (*Tratat despre Măsurare și Calcul*). Abraham bar Hiyya explică:

> Cel ce-și dorește să învețe corect cum să măsoare ariile și cum să le împartă, acela trebuie să priceapă temeinic teoremele generale ale aritmeticii și geometriei, pe care se bazează predarea… măsurării. Dacă a stăpânit pe de-a-ntregul aceste idei, nu poate… nicicând devia de la adevăr.

Aceasta încheie o lungă epocă, în care matematicienii arabi au jucat rol de paznici de încredere ai matematicii. Progresul înregistrat în cei trei mii de ani care au urmat perioadei vechiului Babilon a constat doar în creșteri cantitative. Odată cu extraordinara trezire intelectuală a Renașterii, centrul de greutate avea însă să se deplaseze spre nordul Italiei, urmat curând și de alte țări din vestul Europei. Umaniștii au descoperit lucrările Antichității grecești și au încurajat procesul de investigare a întregii

lor cunoașteri, inclusiv a matematicii. Pe măsură ce copierea de manuscrise se transforma într-o industrie importantă (după una dintre relatări, influentul bancher florentin Cosimo de Medici folosea 45 de scribi), inventarea tiparului cu litere mobile nu putea fi decât anticipată, împreună cu proliferarea cunoașterii științifice care a rezultat din ea.

Istoria liniștită și oarecum inertă a ecuației pătratice nu semnala că următorul stadiu în rezolvarea ecuațiilor avea să fie deosebit de dramatic. Capitolul următor era pe punctul de a începe.

Cubica

Așa cum problemele legate de arii conduc la ecuații pătratice (deoarece o distanță se înmulțește cu alta, rezultând o distanță la pătrat) calculul volumelor unor corpuri, precum cubul (unde lungimea este înmulțită cu lățimea și cu înălțimea), conduce la *ecuații cubice*. Formula generalizată a ecuației cubice are forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, unde *a, b, c, d* sunt orice numere date (cu excepția lui *a*, care trebuie să fie diferit de zero). Scopul tuturor amatorilor de ecuații era clar: să găsească o formulă, analogă cu cea pentru ecuația pătratică, care, substituind valorile lui *a, b, c, d,* să dea soluțiile dorite. Vechii babilonieni creaseră niște tabele care le permiteau să rezolve câteva ecuații particulare de acest gen, iar poetul-matematician persan Omar Khayyam[19] a prezentat soluții geometrice ale altor câtorva, în secolul al XII-lea. Cu toate acestea, rezolvarea formulei generalizate a ecuației cubice i-a sfidat pe matematicieni până în secolul al XVI-lea. Nu fiindcă încercările ar fi lipsit. Faimoșii algebriști florentini Maestro Benedetto, în secolul al XV-lea, și cei doi predecesori ai săi din secolul al XIV-lea, Maestro Biaggio și Antonio Mazzinghi[20], au pus un zel considerabil în a pricepe ecuațiile și soluțiile lor. Eforturile lor s-au dovedit însă insuficiente în ce privește cubica. Un alt matematician al secolului al XIV-lea, Maestro Dardi[21] din Pisa, a prezentat și el nu mai puțin de 198 de soluții pentru diferite tipuri de ecuații – dar nu pentru formula generalizată a cubicei. Chiar și celebrul pictor

renascentist Piero della Francesca, ce era și un talentat matematician, și-a adus contribuția la încercările de a găsi o soluție. În ciuda acestor eforturi și a altora la fel de susținute, răspunsul se lăsa așteptat. Nu-i de mirare că matematicianul și autorul Luca Pacioli[22] (1445–1517) își încheia în 1494 importanta sa carte *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (*Însumarea cunoștințelor despre aritmetică, geometrie, proporție și proporționalitate*) pe un ton defetist. „Pentru ecuațiile cubică și cuartică (conținând pe x^4)", spunea el, „până acum n-a fost posibilă formarea de reguli generale." Vestea bună era că enciclopedica lucrare de șase sute de pagini a lui Pacioli era scrisă în accesibila limbă italiană. Ca urmare, ea a promovat studiile algebrice și printre necunoscătorii limbii latine. Din acest moment, interesul practic a făcut loc ambiției. Nimeni nu căuta soluțiile cubicei pentru vreun scop practic. Rezolvarea ecuației devenise o provocare intelectuală demnă de a fi luată în seamă de cele mai strălucite minți matematice. Acesta a fost contextul în care și-a făcut intrarea în scenă un erou modest – un matematician din Bologna, numit Scipione dal Ferro[23] (1465–1526) –, care, fără să știe, a devenit parte a unei drame în curs.

Scipione dal Ferro era fiul unui producător de hârtie, Floriano, și al soției acestuia, Filippa. În secolul care asistase la inventarea mașinii de tipărit, producția de hârtie deveni o meserie căutată. Puține lucruri se știu despre tinerețea lui Scipione și despre ceea ce l-a îndemnat să studieze matematica. El și-a completat, probabil, educația la Universitatea din Bologna. Această prestigioasă instituție, cea mai veche universitate aflată încă în funcție în ziua de astăzi (figura 37 arată un impunător coridor al primei clădirii construite, care

Figura 37

găzduiește actualmente o bibliotecă), a fost înființată în 1088, iar în secolul al XV-lea și-a câștigat renumele de a fi una din cele mai bune din Europa. Matematica (depășind granițele geometriei fundamentale euclidiene) făcuse parte din *curriculum* la Bologna încă de la finele secolului al XIV-lea, iar în 1450 Papa Nicolaus al V-lea adăugase corpului profesoral patru posturi de matematicieni. În 1496, dal Ferro a devenit unul dintre cei patru titulari ai catedrei de matematică a universității și, în afara unui scurt concediu petrecut la Veneția, a continuat să activeze pe acest post până la sfârșitul zilelor sale. Deși mai multe surse îl descriu ca fiind un mare algebrist, din opera sa n-a supraviețuit nici o lucrare – nici sub formă de manuscris, nici de tipăritură. O culegere de note de curs de la Universitatea din Bologna, datată 1554–1568, s-ar putea să includă o copie a scrierilor lui dal Ferro (figura 38). Pasajul este intitulat: „De la *Cavaliere* Bolognetti, care-l avea de la maestrul bolognez de odinioară, Scipione dal Ferro". Probabil că Scipione l-a întâlnit pe Luca Pacioli în 1501, pe când acesta ținea cursuri la Bologna.

Figura 38

Pacioli nu era o somitate în domeniu, dar știa să transmită cunoștințele matematice. Frustrat de neputința de a rezolva ecuația cubică, Pacioli l-a convins, poate, pe dal Ferro – care avea o mare îndemânare în manipularea expresiilor ce conțin rădăcini de ordinul trei și doi – să încerce el însuși. Cam prin anul 1515, eforturile lui dal Ferro au dat, în sfârșit, roade. El a dat o mare lovitură, reușind să rezolve ecuația cubică de forma $ax^3 + bx = c$. În limbajul matematic al secolului al XVI-lea, asemenea ecuații erau descrise drept „necunoscute și cuburi egale cu numere". Deși ecuația nu era sub forma generalizată, ea deschidea drumul pentru descoperirile ce aveau să urmeze. Scipione dal Ferro nu s-a grăbit să-și

publice rezultatul epocal. Ținerea sub tăcere a descoperirilor matematice a fost ceva obișnuit până în secolul al XVIII-lea (ce deosebire față de goana actuală după publicații științifice!). Cu toate acestea, el a divulgat soluția elevului și ginerelui său, Annibale della Nave, și cel puțin unui alt student, venețianul Antonio Maria Fiore. El și-a expus, de asemenea, metoda într-un manuscris ajuns, post-mortem, în posesia ginerelui său.

Bologna secolului al XVI-lea cunoștea o creștere a interesului pentru matematică. Matematicienii și alți învățați erau implicați uneori în dezbateri și dispute publice care atrăgeau mari mulțimi de oameni. Asistența nu cuprindea numai oficiali universitari și judecători desemnați, ci și studenți, susținători ai adversarilor, și spectatori veniți doar pentru a se amuza sau a face pariuri. De multe ori, opozanții înșiși pariau mari sume de bani pe victoria pe care și-o anticipau. După descrierea unui istoric al matematicii din secolul al XIX-lea, matematicienii erau interesați de asemenea confruntări[24] ale minților deoarece de rezultatele acestora

> depindea nu numai reputația lor în oraș sau în universitate, ci și menținerea postului, eventual creșterea salariului. Disputele aveau loc în piețe publice, biserici și la curțile unor nobili sau principi, care socoteau o onoare să numere în suita lor savanți pricepuți nu doar la preziceri astrologice, ci și la dispute asupra unor probleme matematice dificile și rare.

Antonio Maria Fiore, care fusese inițiat în secretul soluției lui dal Ferro, era un matematician mediocru. După moartea lui dal Ferro, nici el nu a publicat soluția imediat (chiar dacă o trata ca și cum el ar fi fost cel ce se cuvenea s-o exploateze), ci s-a hotărât să aștepte momentul potrivit – unul care să-i îngăduie să-și facă un renume. Într-o societate în care reînnoirea numirilor la universitate depindea în mare măsură de succesul în dezbateri, posesiunea unei arme secrete putea face diferența între supraviețuire și pieire. Ocazia s-a ivit în cele din urmă în 1535, iar Fiore l-a provocat pe matematicianul Niccolò Tartaglia la un concurs public de rezolvări de probleme. Cine era acest Tartaglia și de ce l-a ales pe el Fiore dintr-o lungă listă de oponenți potențiali?

Niccolò Tartaglia[25] (figura 39) se născuse în Brescia, în 1499 sau 1500. Adevăratul său nume de familie era Fontana, dar fusese poreclit Tartaglia (adică „bâlbâitul“), datorită unor tăieturi de sabie la gură, căpătate la vârsta de doisprezece ani de la un soldat francez. Băiețașul fusese crezut mort în catedrala în care își căutase refugiul, dar îngrijirile mamei sale îl readuseseră la viață. Ca adult, purtase mereu barbă, pentru a-și ascunde cicatricile care-l desfigurau. Tartaglia provenea dintr-o familie foarte săracă. Tatăl său, Michele, un curier poștal, murise când Niccolò avusese în jur de șase ani, lăsând-o pe văduvă și pe copiii ei într-o sfâșietoare mizerie.

Figura 39

Tartaglia fusese nevoit să-și întrerupă lecțiile de scris și citit la litera *k*, deoarece familia lui nu mai avusese cu ce să-i plătească tutorele. În retrospectiva de mai târziu, el și-a descris astfel terminarea studiilor: „Nu m-am întors niciodată la un tutore, dar am continuat să studiez singur operele unor oameni morți, însoțit doar de fiica Sărăciei, care se numește Sârguință.“ În ciuda acestor circumstanțe nefavorabile, Tartaglia s-a dovedit a fi un matematician talentat. În cele din urmă, în 1534, s-a mutat la Veneția ca profesor de matematică, după ce petrecuse ceva vreme la Verona. În memoriile sale matematice, Tartaglia afirmă că în 1530 a reușit, după eforturi considerabile, să rezolve ecuația $x^3 + 3x^2 = 5$. Aceasta fusese o provocare ce-i fusese lansată de către concetățeanul său din Brescia, Zuanne de Tonini da Coi. Zvonurile despre pretenția lui Tartaglia[26], că ar fi capabil să rezolve cubicele, trebuie să fi ajuns la urechile lui Antonio Maria Fiore, dar acesta din urmă a primit informația cu scepticism, crezând că Tartaglia o face pe grozavul. Convins că datorită cunoașterii secretului soluției lui dal Ferro îl poate învinge, Fiore l-a provocat. Puțin timp mai târziu, ei doi au ajuns la o înțelegere asupra condițiilor precise ale disputei.

Fiecare parte avea să propună spre rezolvare oponentului său 30 de probleme. Problemele urmau să fie sigilate și depuse la notarul *Maestro* Per Iacomo di Zambelli. După ruperea sigiliilor, cei doi concurenți aveau un termen de 40 până la 50 de zile pentru rezolvarea lor. Ei au căzut de acord ca acela care va rezolva mai multe probleme să fie socotit învingător și, pe lângă onoruri, să primească o frumoasă recompensă pentru fiecare problemă (după anumite surse, cel care pierdea urma să suporte cheltuielile unei serbări la care ar fi participat câștigătorul și treizeci de prieteni ai săi). După cum a reieșit, Fiore nu avea decât o singură săgeată pentru arcul său – toate problemele pe care le propusese erau de forma $ax^3 + bx = c$ pentru care cunoștea soluția de la dal Ferro. Pe de altă parte, lista lui Tartaglia cuprindea 30 de probleme diferite, fiecare de alt tip, „pentru a arăta că-l stimam prea puțin și n-aveam nici un motiv să-mi fie frică de el“ (ca să-i folosesc cuvintele).

Data fixată a concursului a fost 12 februarie 1535. Diverși demnitari universitari și o parte din înalta societate intelectuală a Veneției au asistat, probabil, la el. Când problemele au fost prezentate celor doi adversari, s-a întâmplat ceva cu totul neașteptat. Spre uimirea asistenței, Tartaglia a dat de capăt tuturor problemelor care-i fuseseră propuse în numai două ore! Iar Fiore nu a reușit să rezolve nici una dintre problemele lui Tartaglia. Aproximativ douăzeci de ani mai târziu, vorbind despre acest eveniment, Tartaglia își amintea:

> Motivul pentru care am fost în stare să-i rezolv cele 30 de probleme într-un interval atât de scurt a fost că toate 30 erau legate de algebra necunoscutelor și a cuburilor egale cu numere (ecuații de forma $ax^3 + bx = c$). [Făcuse aceasta] crezând că eu nu voi fi în stare s-o rezolv pe nici una din ele, deoarece Fra Luca [Pacioli] afirmă în tratatul său că e imposibil să rezolvi asemenea ecuații printr-o regulă generală. Dar, printr-un noroc, cu numai opt zile înainte de data fixată pentru a ridica de la notar cele 30 de probleme sigilate, descoperisem regula generală pentru asemenea expresii.

De fapt, la o zi după ce descoperise soluția pentru $ax^3 + bx = c$, Tartaglia o descoperise și pe cea a ecuației $ax + b = x^3$. Cum știa deja să rezolve $x^3 + ax^2 = b$ (provocarea pe care i-o lansase da Coi), el devenise peste noapte, literalmente, expert mondial în rezolvarea de ecuații cubice. Cu toate acestea, a refuzat sugestia lui da Coi de a-și publica de îndată soluția, explicând că avea de gând să scrie o carte pe această temă. Formulele descoperite de Tartaglia erau atât de complicate, încât i se părea greu să-și țină minte propriile sale reguli pentru cele trei cazuri. Ca să nu le uite, a compus câteva versuri care începeau cu:

Atunci când cubul și necunoscuta
Împreună fac un număr întreg, cunoscut:
Găsește-ntâi două numere diferind la fel;
Produsul lor, atunci, ca și faima lor comună…

Atât versurile complete ale lui Tartaglia, cât și formula sa sunt prezentate în Anexa 5.

Tartaglia nu mai era acum un profesor anonim de matematică – era o celebritate. Dar în Italia renascentistă, nici o poveste, nici măcar una matematică, nu lua naștere fără a trece prin momente melodramatice.

Intriga se complică

Vestea despre întrecerea dintre Tartaglia și Fiore s-a răspândit ca vântul prin toată Italia, ajungând la urechile uneia dintre cele mai strălucite și controversate figuri ale secolului al XVI-lea – fizicianul, matematicianul, astrologul, cartoforul și filozoful Gerolamo Cardano[27] (1501–1576; figura 40).

Chiar prin comparație cu numeroasele genii pline de culoare ale Renașterii, viața lui Cardano frapează imediat imaginația. Era fiul nelegitim al avocatului milanez Fazio Cardano și al mult mai tinerei văduve Chiara Micheri. În autobiografia sa de mai târziu, *De vita propria liber* (*Cartea vieții mele*), Cardano se delectează descriindu-și cu multe și inutile detalii toate problemele medicale din prima parte a vieții, inclusiv

Figura 40

impotența sexuală de care suferise între 21 și 31 de ani. Încurajat de cultivatul său tată, care în mai multe ocazii l-a consiliat pe Leonardo da Vinci în probleme de geometrie, Gerolamo a studiat matematica, clasicii antici și medicina la universitățile din Pavia și Padova. În zilele de studenție, jocurile de noroc i-au fost principala sursă de sprijin financiar. A jucat zaruri, cărți și șah, transformându-și în profit cunoștințele de teoria probabilităților. Ulterior, avea să-și transforme dependența de joc într-un volum interesant: *Liber de ludo aleae* (*Cartea despre jocurile de noroc*) – cea dintâi lucrare de teoria probabilităților. Având un glas foarte puternic și o atitudine agresivă, Cardano a reușit să se certe cu mulți profesori, iar la sfârșitul studiilor, prima comisie i-a refuzat titlul de doctor în medicină, cu votul covârșitor de 47 contra 9. Doar după încă două runde de vot a reușit să obțină titlul. Apoi primele încercări de a ocupa un post de medic la Milano au eșuat lamentabil, dar curând norocul i s-a schimbat radical. În 1534, prin influența cunoscuților tatălui său, a fost numit profesor de matematică la Fundația Piatti. Simultan, a început să practice clandestin medicina, dând dovadă că este extrem de eficient. Succesul nu i-a câștigat, totuși, sprijinul Colegiului Medicilor din Milano. În 1536, Cardano s-a hotărât să transforme această dispută într-un spectacol, publicând o carte extrem de agresivă – *De malo recentiorum medicorum medendi usu libellus* (*Despre malpracticile recente ale medicinei de uz curent*). În particular, el ridiculiza manierele grandilocvente ale medicilor vremii sale: „Lucrurile care sporesc reputația unui medic în zilele noastre sunt manierele lui, servitorii, trăsura, hainele, eleganța și aerele, toate afișate într-o manieră artificială și insipidă; cunoștințele și experiența par

să nu conteze deloc.“ Oricât de incredibil ar părea, această ofensivă i-a asigurat lui Cardano un post de medic, iar spre mijlocul secolului, el avea să devină unul dintre cei mai bine-cunoscuți practicieni europeni, depășit numai de legendarul anatomist Andreas Vesalius.

După toate aparențele, competițiile și controversele îi priau lui Cardano. Aceasta provenea, poate, din pasiunea lui pentru jocuri de noroc. El a notat cândva: „Chiar dacă jocul ar fi din toate privințele[28] un rău, ținând seama de numărul foarte mare al celor care joacă, el ar părea să fie un rău natural. Din acest motiv, ar trebui analizat de un doctor în medicină, ca și cum ar fi o boală incurabilă.“ Plin de duh și cu limbă ascuțită, Cardano a câștigat multe dispute, atât în timpul anilor de studenție, cât și ca savant matur. Nu-i de mirare că veștile despre disputa Tartaglia–Fiore i-au aprins curiozitatea. Pe atunci, lucra la cea de-a doua carte matematică a sa, *Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis* (*Practica aritmeticii generale și a măsurării simple*), iar ideea de a include în aceasta soluția cubicei i s-a părut deosebit de atrăgătoare. În cei câțiva ani care au urmat, Cardano a încercat probabil zadarnic să descopere singur soluția. Dând greș, s-a hotărât să-l trimită la Tartaglia pe vânzătorul de cărți Zuan Antonio da Bassano, pentru a-l convinge să-și dezvăluie formula. Tartaglia și-a descris ulterior răspunsul în termeni neechivoci: „Spune-i Excelenței Sale să mă ierte, dar atunci când îmi voi publica invenția va fi în propria mea lucrare, nu în a altora, așa că Excelența Sa trebuie să mă scuze.“ După câteva schimburi de mesaje destul de lungi și caustice, în care Tartaglia a respins toate propunerile lui Cardano, el a sfârșit prin a accepta invitația de a-l vizita la Milano pe acesta din urmă. Trucul care l-a înduplecat a fost promisiunea lui Cardano de a-l prezenta viceregelui și comandantului suprem spaniol din Milano, Alfonso d’Avalos. Tartaglia scrisese o carte despre artilerie, iar un asemenea contact îi putea asigura un frumos venit.

La Milano, Cardano l-a supus pe Tartaglia unui adevărat tir de încântătoare dovezi de ospitalitate, continuându-și strădania de a-i smulge secretul. Dar buzele lui Tartaglia au rămas

pecetluite – cel puțin, pentru o vreme. El a respins până și propunerea de a fi inclus în cartea lui Cardano un capitol care să-l proclame pe Tartaglia drept descoperitor al soluției.

Din păcate, de aici înainte, informațiile noastre despre evenimentele care au urmat se bazează aproape exclusiv pe mărturia, departe de a fi obiectivă, a lui Tartaglia. Conform spuselor lui, el a sfârșit prin a fi de acord să divulge secretul, dar numai după ce Cardano i-a făcut următorul jurământ solemn: „Îți jur pe Sfânta Evanghelie și pe onoarea mea de gentilom că nu voi publica descoperirile domniei tale, dacă mi le vei spune, și că – pun chezășie credința mea de creștin adevărat – le voi încifra când mi le voi nota, în așa fel încât după moartea mea nimeni să nu fie în stare să le priceapă." Această importantă discuție a avut loc pe 25 martie 1539. Ludovico Ferrari, pe atunci tânăr secretar în casa lui Cardano, ne spune o poveste oarecum diferită. Conform acestuia, Cardano n-a făcut nici un jurământ de păstrare a secretului. Ferrari susținea că ar fi fost de față la discuție și că Tartaglia dezvăluise secretul doar din recunoștință pentru ospitalitatea lui Cardano. Dar, așa cum vom vedea îndată, obiectivitatea lui Ferrari este tot atât de chestionabilă ca și cea a lui Tartaglia. Cert e numai faptul că *Practica arithmeticae generalis a* apărut în mai 1539 fără soluția lui Tartaglia.

Ludovico Ferrari (1522–1565) este următorul personaj central[29] al acestei drame tragicomice. El ajunsese în casa lui Cardano la vârsta de 14 ani, venind din Bologna. Cardano a descoperit repede talentele excepționale ale tânărului, așa că și-a asumat întreaga responsabilitate a educației sale. Ferrari era însă tot atât de irascibil, pe cât era de ager. Într-o încăierare, la vârsta de 17 de ani, și-a pierdut degetele de la mâna dreaptă. Îndată ce a aflat soluția lui Tartaglia, Cardano a reușit s-o demonstreze, apoi a început să se preocupe de ecuații cubice mai generale. Amintiți-vă că Tartaglia izbutise să rezolve doar forme particulare ale cubicei, cum ar fi $x^3 + ax = b$ sau $x^3 = ax + b$. Matematicienii secolului al XVI-lea nu realizaseră încă faptul că acestea sunt doar cazuri particulare ale ecuației generale $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, așa că tratau separat fiecare

dintre cele 13 tipuri de ecuații cubice. Simultan, beneficiind și de încurajările lui Cardano, sclipitorul Ferrari a reușit în 1540, să găsească o frumoasă soluție a *ecuațiilor cuartice*, precum $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Maestrul și elevul erau acum pe picior de egalitate. Un zvon că dal Ferro îi lăsase ginerelui său formula sa originală ajunsese până la Cardano. În 1543, Cardano și Ferrari au făcut un drum până la Bologna, special pentru a se întâlni cu Annibale della Nave, căruia îi fusese încredințată lucrarea originală a lui Scipione dal Ferro. Acolo, ei au avut șansa să obțină direct de la sursă confirmarea faptului că dal Ferro ajunsese într-adevăr, cu 20 de ani înainte, la aceeași soluție ca și Tartaglia. Chiar dacă i-ar fi jurat ceva lui Tartaglia, Cardano se putea socoti acum eliberat de orice obligații. La urma urmei, prin acel formal jurământ se angajase să nu dezvăluie formula lui Tartaglia, nu pe cea a lui dal Ferro. În 1545, Cardano a publicat lucrarea pe care mulți matematicieni o privesc ca reprezentând începutul algebrei moderne – *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (*Marea artă sau regulile algebrei*, *Cartea întâi*), cunoscută sub numele de *Ars magna* (*Marea artă*. Figura 41 arată frontispiciul cărții). În această carte, Cardano investighează în detaliu ecuațiile cubică și cuartică, împreună cu soluțiile lor. El demonstrează pentru prima dată că soluțiile pot fi negative, iraționale, iar în unele cazuri pot implica chiar și rădăcini pătrate din numere negative – cantități pe care el le numește „sofistice“ și care, în secolul al XVII-lea, aveau să primească denumirea de „numere imaginare“. Tipograful Johannes Petreius din Nürnberg a publicat prima ediție din *Ars magna*, care a impresionat Europa matematică și a fost imediat aclamată. Un singur matematician, inutil

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Figura 41

să o spunem, a dat dovadă de mai puțin respect. Furia lui Tartaglia a fost inimaginabilă. În mai puțin de un an, el a publicat cartea *Quesiti et inventioni diverse* (*Diverse probleme și invenții*), în care îl acuza direct pe Cardano de sperjur. Prezentând ceea ce pretindea a fi o relatare cuvânt cu cuvânt a tuturor discuțiilor dintre ei (chiar și cele care avuseseră loc cu șapte ani înainte), Tartaglia folosea împotriva lui Cardano limbajul cel mai ofensator. Justificarea sa era următoarea: „Efectiv nu știu vreo infamie mai mare decât să încalci un jurământ." Dar oare chiar să fi fost Cardano un plagiator matematic? Al doilea paragraf din capitolul introductiv al *Ars magna* spunea:

> În zilele noastre, Scipione dal Ferro din Bologna a rezolvat cazul egalității dintre un cub și prima putere, pe de o parte, și o constantă, pe de alta – o realizare foarte elegantă, absolut admirabilă. Cum arta aceasta depășește orice iscusință umană, orice talent imaginabil, fiind un dar cu adevărat ceresc și o dovadă foarte clară a capacității minților omenești, oricine i se dedică va crede că nu e nimic pe care să nu-l poată pricepe. În emulație cu el, prietenul meu Niccolò Tartaglia din Brescia, vrând să nu fie mai prejos, rezolvă același caz atunci când intră în dispută cu elevul lui Scipione, Antonio Maria Fiore, și, înduplecat de numeroasele mele rugăminți, îmi arătă soluția lui. Căci eu fusesem înșelat de cuvintele lui Luca Pacioli, care tăgăduia că s-ar mai putea găsi vreo altă regulă, mai generală, decât a sa. În ciuda multelor lucruri pe care le descoperisem deja, după cum este bine cunoscut, îmi pierdusem nădejdea și nu mai încercasem să-mi continui căutările. Atunci însă, primind soluția lui Tartaglia și căutându-i demonstrația, am ajuns să pricep că mai aveam ce găsi. Urmărind această idee cu încredere sporită, am făcut toate aceste noi descoperiri, parte prin puterile mele, parte datorită lui Ludovico Ferrari, fostul meu elev.

În capitolul XI („Despre cubul și prima putere egale cu un număr"), Cardano repetă pe scurt aceleași mențiuni de prioritate intelectuală:

> Scipio Ferro din Bologna și-a descoperit regula acum mai bine de treizeci de ani și i-a transmis-o lui Antonio Maria Fiore din Veneția, a cărui dispută cu Niccolò Tartaglia din Brescia i-a dat lui Niccolò prilejul s-o descopere la rândul lui. El (Tartaglia) mi-a dat-o mie ca răspuns la rugămințile mele, deși păstrând pentru sine demonstrația. Înarmat cu acest ajutor, i-am căutat demonstrația sub diverse forme. Lucrul acesta a fost foarte dificil. Versiunea mea a acestei demonstrații urmează.

Tartaglia a fost departe de a se simți îmblânzit de recunoașterea lui Cardano. De fapt, campania de jigniri deja pornită s-a prefăcut într-un urât spectacol de insulte, jucat în fața întregului public italian. În vreme ce Cardano se ținea deoparte, aprigul său colaborator, Ludovico Ferrari, și-a asumat cu plăcere rolul de gladiator intelectual, pentru a-și apăra, după expresia sa, „creatorul". Ca răspuns la cartea lui Tartaglia, Ferrari a conceput un *cartello* – o scrisoare de provocare – pe care l-a distribuit la cincizeci și trei de savanți și demnitari din întreaga Italie. Stilul adoptat de el a fost cât se poate de violent: „Citindu-ți aiurelile, am impresia că citesc glumele lui Piovano Arlotto [un preot care trăise în secolul al XV-lea, cunoscut pentru glumele sale obscene]." Continua apoi plin de dispreț, acuzându-l pe Tartaglia însuși că ar fi un plagiator: „Printre cele peste o mie de erori din cartea dumitale, remarc mai întâi că în secțiunea opt dai un rezultat al lui Giordano [referindu-se la matematicianul german din secolul al XIII-lea Jordanus Nemorarius, cunoscut și ca Jordanus de Nemore] ca fiind al dumitale, fără a-l menționa, iar asta se cheamă furt." Primul *cartello* a fost trimis pe 10 februarie 1547. Tartaglia l-a primit pe 13 și a avut nevoie de numai șase zile pentru a pregăti contraatacul. El s-a plâns mai întâi că Gerolamo Cardano nu se sinchisise să-i dea o replică:

> Îți atrag din nou atenția că dacă numitul Domn Gerolamo Cardano nu are de gând să-mi scrie, recunoscând cu înțelepciune că a greșit, atunci n-are nici un motiv să se plângă de mine… Ar trebui, cel puțin, să te asiguri ca și el să semneze cartelul, cu mâna lui, ca asociat al dumitale în această dispută.

Ca răspuns la invitația făcută de Ferrari la o dispută publică pe teme matematice, Tartaglia a declarat că s-ar disputa cu plăcere cu Cardano însuși. Evident, Tartaglia nu vedea nici un motiv să provoace la discuții un tinerel fără merite deosebite, deoarece, chiar ieșind victorios dintr-o asemenea dispută, nu prea avea ce câștiga; prefera să se lupte cu Cardano, a cărui reputație pe continent se afla într-o spectaculoasă creștere. Cardano ajunsese însă într-o etapă a vieții în care dorea să promoveze un temperament mai echilibrat (el îi sfătuia pe savanți să adopte un stil de viață bazat pe „lectura unor povești de dragoste"). Ca atare, păstra tăcerea.

Între 10 februarie 1547 și 24 iulie 1548, Tartaglia și Ferrari au schimbat nu mai puțin de 12 *cartelli* (șase provocări și șase replici), toate comunicate întregii înalte societăți intelectuale. În ciuda stilului în general denigrator, aceste scrisori de provocare servesc și ca o interesantă documentație asupra cunoștințelor a doi matematicieni de frunte ai Renașterii. Necontenitele tentative ale lui Tartaglia de a-l atrage pe Cardano în dispută au eșuat lamentabil. În 1548, lui Tartaglia i s-a oferit postul de profesor de geometrie în orașul său natal, Brescia. Datorită virulenței corespondenței sale cu Ferrari, foarte probabil ca numirea să fi fost condiționată de înfrângerea lui Ferrari într-o dispută publică. Ca urmare, Tartaglia s-a văzut silit – de voie, de nevoie – să participe la o dezbatere. S-a convenit ca subiectul acesteia să fie reprezentat de 62 de probleme propuse de cei doi adversari (31 de către fiecare) – cele prezentate în cele 12 *cartelli*. Aproape toate erau de matematică, dar, conform cu spiritul Renașterii, existau și chestiuni din alte domenii, precum arhitectura, astronomia, geografia și optica.

Dezbaterea a avut loc pe 10 august 1548, la Milano, într-o biserică situată în grădina Frati Zoccolanti. Toată protipendada milaneză era de față, inclusiv guvernatorul, Don Ferrante di Gonzaga, care urma să fie arbitrul cu drept de veto. Ferrari și-a făcut apariția cu o vastă ceată de susținători, în vreme ce Tartaglia părea să fi fost însoțit doar de fratele său. Cardano făcuse în așa fel încât să lipsească din oraș în timpul dezbaterii. Din păcate, nu există nici o consemnare oficială privitoare

la desfășurarea dezbaterii sau la verdictul final. În două cărți ulterioare, Tartaglia prezintă relatări destul de confuze asupra confruntării. În particular, blamează asistența pentru a fi făcut intervenții gălăgioase și a-l fi împiedicat să-și prezinte complet argumentele. Faptele seci prezintă însă un tablou destul de diferit. Tartaglia renunțase la dispută înainte de încheierea ei, imediat după sfârșitul primei zile. Mai știm că lui i s-a refuzat plata după un an de predare la Brescia și că a fost nevoit să se întoarcă la modesta meserie de dascăl la Veneția. Toate semnele indică așadar că Tartaglia ar fi suferit o cruntă și umilitoare înfrângere la Milano. Cardano menționează și el în scrierile sale, pe scurt, că Ferrari s-ar fi dovedit un adversar mult superior lui Tartaglia.

Cât despre triumfătorul Ludovico Ferrari, cariera lui a luat un avânt extraordinar. În urma victoriei repurtate, ofertele de angajare au început să curgă. El a refuzat chiar și oferta de a-l instrui pe fiul împăratului, pentru funcția mai rentabilă de agent fiscal al guvernatorului orașului Milano. Viața sa avea să se termine însă pe neașteptate, furnizând actul final al acestei drame.

La revenirea sa la Bologna, cândva după 1556, Ferrari era însoțit de sora sa Maddalena, o văduvă sărmană. Deși nu există vreo dovadă directă că ea l-ar fi otrăvit în 1565, totuși comportamentul și circumstanțele vieții ei ulterioare ridică suspiciuni serioase. Maddalena s-a căsătorit la două săptămâni după moartea lui Ferrari și i-a transferat soțului său toți banii și toate proprietățile moștenite de la fratele ei. Când Cardano a venit la Bologna ca să-și recupereze o parte dintre cărți și însemnări, nu a mai găsit nimic. Soțul Maddalenei pusese stăpânire pe tot, aparent cu intenția de a publica ceva material în numele fiului său dintr-o căsătorie anterioară.

Istoria rezolvării[30] ecuațiilor cubice și cuartice ridică probleme interesante, care depășesc domeniul matematicii. Această poveste ar fi incompletă dacă n-am aborda subiectul proprietății intelectuale și al drepturilor de proprietate asupra informației științifice. În timpul acerbei corespondențe Tartaglia–Ferrari, Ferrari susținuse că Gerolamo Cardano îi făcuse, de fapt, un serviciu lui Tartaglia, salvându-i formula de uitare

și plantând-o într-o „grădină fertilă" – *Ars magna*. Dar așa stăteau oare lucrurile? Sau Tartaglia avea dreptate să riposteze că, fără formula aceasta, grădina lui Cardano ar fi rămas un obscur câmp de buruieni? Din perspectiva lui Tartaglia, Cardano era, indubitabil, diavolul. Nu numai că-și încălcase jurământul, dar, făcând aceasta, îi răpise lui Tartaglia recunoașterea și faima la care acesta simțea că avea dreptul. Nici un rând dintre cele scrise de Cardano în cartea sa pentru a-i recunoaște prioritatea nu i-ar fi putut vindeca această rană. Conta numai faptul că, după recunoaștere, toate referințele se făceau la „formula lui Cardano" și la cartea lui. Mai grav, Cardano adăugase multe soluții și demonstrații proprii la toate formele ecuațiilor cubice și cuartice, calitatea de realizare epocală a formulei lui Tartaglia pierzându-se în această învălmășeală.

Dar ce se poate spune din perspectiva lui Cardano? Jurământ solemn sau nu, el considera în mod sigur că avea dreptul să-și publice fecunda lucrare în materie. Punctul său de vedere este de înțeles mai ales dacă realizăm (așa cum o făcea el) că nu Tartaglia, ci Scipione dal Ferro era la originea descoperirii formulei. Ce drept avea Tartaglia să împiedice publicarea unei formule pe care dal Ferro însuși o lăsase pentru posteritate? Nici afirmația lui Tartaglia, că și el era pe punctul să publice o carte asupra noii algebre, nu rezistă prea mult. Realitatea a fost că, în ciuda avansului substanțial pe care îl avea față de Cardano, Tartaglia s-a lăsat distras de alte proiecte, iar cartea asupra noii algebre nu a apărut niciodată.

Două exemple actuale, de practici științifice uzuale privind publicarea invențiilor, ne pot ajuta să arătăm că problema drepturilor de autor nu e deloc simplă. Astronomii propun anual un plan de cercetare pentru Telescopul spațial Hubble. După un foarte detaliat proces de evaluare din partea unor echipe de experți, doar circa o propunere din șapte este selectată pentru observațiile care urmează să fie efectuate. Datele culese sunt puse la dispoziția celor care le-au propus la câteva zile după ce observația are loc. După aceasta, urmează o perioadă de proprietate de un an, în timpul căreia numai propunătorul are acces la date. Propunătorul poate profita de această perioadă

pentru a analiza datele și a publica rezultatele. După un an, datele devin publice, putând fi utilizate de toți astronomii din lume. Stabilirea acestei practici a avut drept scop principal recunoașterea faptului că descoperirile științifice (în special cele făcute cu fonduri de la buget) aparțin comunității globale și nu trebuie tratate ca proprietate privată. În al doilea rând, procedurile au fost astfel gândite pentru a descuraja amatorii de amânări să oprească la nesfârșit difuzarea informațiilor importante pe care le dețin.

În același timp, companiile private care se ocupă, să zicem, cu modelarea matematică a comportării pieții de mărfuri țin cu dinții de secretul descoperirilor lor, însă poate că nu mai mult decât anumiți maeștri bucătari, de rețetele lor secrete.

Dintr-un punct de vedere pur științific, cel mai normal ar fi ca formula de rezolvare a ecuației cubice să fie numită „formula lui dal Ferro", dat fiind că el a fost, neîndoielnic, primul care a descoperit-o. Acesta nu este însă nici primul, nici ultimul caz în care inovațiile științifice poartă un alt nume decât cel al adevăratului lor autor. Atitudinea lui Tartaglia față de proprietatea intelectuală apare oarecum ipocrită din perspectiva propriilor lui practici. De pildă, el a prezentat ca fiind ale sale traducerile unor lucrări ale lui Arhimede, când, de fapt, nu făcuse decât să publice niște traduceri latinești din secolul al XIII-lea, ale eruditului flamand Wilhelm din Moerbeke. Tot astfel, el a publicat o soluție a problemei mișcării unui corp greu pe un plan înclinat, fără a-l menționa pe autorul soluției, matematicianul german Jordanus de Nemore.

Întreaga suită de evenimente dal Ferro–Tartaglia–Cardano–Ferrari rămâne una dintre cele mai controversate afaceri din istoria matematicii. Nu-i de mirare că mulți istorici ai științei s-au delectat să muște din ea. Din punctul de vedere al cărții de față, important este că, după căderea cortinei asupra acestei drame, matematicienii știau să rezolve ecuațiile cubice și cuartice, chiar dacă o teorie generală a ecuațiilor era încă absentă.

Cardano nu și-a tăgăduit niciodată norocul. În *De Vita Propria*, el scrie:

> Deși fericirea evocă o stare cu totul contrară naturii mele, pot spune sincer că am fost privilegiat uneori să am parte întru câtva de ea. Dacă în viață există cât de cât ceva bun cu care să putem împodobi scena acestei comedii, eu n-am fost lipsit de asemenea daruri.

Dat fiind rolul pe care avea să-l joace, câteva secole mai târziu, rezolvarea ecuațiilor în formularea teoriei grupurilor ca limbaj „oficial" al simetriei din natură și arte, următorul fapt istoric iese în evidență, ca o curiozitate amuzantă. Cardano a publicat horoscopurile[31] a o sută de oameni proeminenți ai veacului său. Doar unul dintre ei, Albrecht Dürer, era artist.

Pentru a încheia această istorisire, trebuie să adaug o părere personală. În vara anului 2003, am decis că trebuia să găsesc locul de naștere al adevăratului erou al ecuației cubice – Scipione dal Ferro. După ceva efort, l-am descoperit. Se află astăzi la intersecția dintre via Guerrazzi și via S. Petronio Vecchio din Bologna. O placă ușor de trecut cu vederea de pe zidul lateral marchează casa drept locul de naștere al lui dal Ferro (figura 42). Am apăsat la întâmplare pe soneriile mai multor apartamente și o doamnă vârstnică a apărut la fereastra unui apartament de la etajul trei. I-am explicat, în italiana mea stângace, că cercetam viața lui Scipione dal Ferro. Mi-a spus să aștept până coboară soțul ei. Amabilul domn mi-a explicat, într-un amestec fragmentar de italiană și engleză, că în clădire nu mai exista nimic care să indice faptul că acolo trăise omul responsabil pentru una dintre realizările majore ale algebrei. Ne-am uitat amândoi în tăcere la placă, preț de câteva minute, apoi ne-am despărțit.

Figura 42

După sclipitoarea realizare dal Ferro–Cardano–Ferrari, era firesc să se creadă că *ecuația cvintică*, de forma $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, putea fi, și ea, rezolvată printr-o formulă. Cu încrederea dată de *Ars magna*, toți se așteptau ca soluția să apară în orice clipă, așa că unele dintre mințile cele mai ascuțite s-au apucat să vâneze această comoară.

Vă proclamăm cel mai mare eșec

Scriitorul satiric Jonathan Swift (1667–1745), celebru pentru *Călătoriile lui Gulliver*, a scris în 1727 un poem amuzant, intitulat *Mobilierul minții unei femei*. Iată câteva versuri:

În conversația bine ticluită,
Ei i se pare nostim să fie necioplită;
Și îmbrăcând ocara-n ironie,
Eșecul cel mai mare ți-l proclamă ție.

În cei 250 de ani de după moartea lui Cardano, istoria căutării unei formule de rezolvare a cvinticei este una a unui mare eșec. Ea a început cu un alt bolognez, Rafael Bombelli[32] (1526–1572). Printr-o coincidență istorică, Bombelli s-a născut exact în anul morții lui dal Ferro. După ce a studiat cu mare admirație *Ars magna*, el a simțit că expunerea lui Cardano nu fusese suficient de limpede; citându-l, „În tot ceea ce a spus, a fost neclar". Ca urmare, și-a petrecut două decenii scriind o carte importantă, numită *L'Algebra*. Spre deosebire de alți matematicieni italieni, Bombelli nu era profesor universitar, ci hidrotehnician. Cea mai originală contribuție a sa a fost să realizeze că nu putem evita rădăcinile pătrate ale numerelor negative. Dar asta necesita un salt mintal. La urma urmelor, ce este rădăcina pătrată din -1 ? Evident, nici un număr obișnuit (real) înmulțit cu el însuși nu dă -1, dat fiind că până și înmulțirea unui număr negativ cu el însuși dă un rezultat pozitiv. Cu toate acestea, soluția ecuației cubice (vezi Anexa 5) producea uneori, drept pas intermediar, o rădăcină pătrată dintr-un număr negativ, chiar atunci când rezultatul final era un număr real. Cardano, care fusese intrigat de aceste numere „sofistice", a conchis că ele erau „atât de subtile, încât erau inutile", și când trebuia să le folosească în calcul, spunea că o face „ignorând tortura mintală". Bombelli, pe de altă parte, a avut inspirația să priceapă că aceste noi numere, pe care le-a numit „plus din minus", erau un vehicul necesar, care putea traversa abisul dintre ecuația cubică (exprimată prin numere reale) și soluțiile finale (care erau tot numere reale). Cu alte cuvinte, deși atât începutul cât și sfârșitul implică numere reale, soluția trebuia

să traverseze noul univers al numerelor „imaginare". Rădăcina pătrată a lui –1 a fost notată cu *i* în anul 1777, de către marele matematician elvețian Leonhard Euler. Numerele din noile tărâmuri dezvăluite de lucrarea lui Bombelli sunt numite astăzi *numere complexe* – ele sunt sume de numere reale (toate numerele obișnuite) și numere imaginare (care cuprind rădăcini pătrate din numere negative).

Mai era încă o importantă lecție istorică de învățat de aici. De-a lungul timpului, studiul ecuațiilor le oferise de mai multe ori matematicienilor o primă privire asupra unor noi tipuri de numere. Fuseseră numere negative, precum –1 și –2; numere iraționale, precum $\sqrt{2}$, care nu puteau fi exprimate ca fracții; iar prin lucrarea lui Bombelli, chiar și numere imaginare, precum $\sqrt{-1}$. Cine putea spune ce revelații putea aduce rezolvarea cvinticii?

În secolele următoare, dezlegarea enigmei cvinticii a devenit una dintre cele mai fascinante provocări din matematică. Din păcate, soluțiile descoperite de dal Ferro și Ferrari (pentru ecuația cubică, respectiv cea cuartică) nu erau de mare folos. Ele reprezentau niște trucuri strălucite, dar mai degrabă *ad-hoc*, decât studii metodice care să poată fi extinse la ecuații de un grad mai mare. De o necesitate acută era găsirea unei teorii mai cuprinzătoare a ecuațiilor în general, nu experimentarea cazurilor particulare. Pentru a folosi o metaforă medicală, matematica trebuia să treacă de la tratarea simptomelor la înțelegerea cauzelor și a efectelor colaterale asociate.

Avocatul francez François Viète[33] (1540–1603) și astronomul englez Thomas Harriot (1560–1621) au făcut câțiva pași în direcția cea bună. Eu au introdus ameliorări atât în notația folosită pentru a descrie ecuațiile algebrice (care era extrem de greoaie în lucrarea lui Cardano), cât și în metodele de rezolvare propriu-zise. Viète a fost și cel căruia i se datorează cuvântul *coeficienți*, folosit pentru a desemna numerele care descriu o ecuație (de ex., *a, b, c* din ecuația $ax^2 + bx + c = 0$). Deși nu era de meserie matematician, Viète a ajuns la un moment dat să salveze onoarea întregii societăți matematice franceze. În 1593, la sfârșitul prefeței cărții sale *Ideae mathematicae*,

matematicianul flamand Adriaan van Roomen (1561–1615) a lansat o provocare confraților săi, propunându-le o problemă ce implica rezolvarea unei intimidante ecuații de gradul 45 (vezi Anexa 6). Ambasadorul Țărilor de Jos la Paris s-a delectat să-i remarce ironic regelui Henric al IV-lea că nu se găsea nici un matematican francez care să poată rezolva ecuația. Încurcat, regele a apelat la Viète[34] și a fost plăcut surprins să constate că acesta s-a dovedit în stare (conform legendei) să găsească soluțiile pozitive în câteva minute, descoperind o relație trigonometrică subiacentă problemei. În fapt, Viète a făcut mult mai mult – a arătat că ecuația avea 23 de soluții pozitive și 22 negative.

Prima încercare serioasă, dar tot eșuată, de a rezolva cvintica a fost făcută de scoțianul James Gregory[35] (1638–1675). Gregory este cunoscut în special pentru telescopul cu reflexie (telescopul gregorian) pe care l-a inventat. În timpul anului de dinaintea morții sale (la vârsta de numai 36 de ani), el începuse să nu mai creadă că era posibilă găsirea vreunei formule pentru determinarea soluțiilor ecuației cvintice. Cu toate acestea, a descoperit niște relații între soluțiile diverselor ecuații și coeficienții lor. Următorul pas a fost făcut de contele german Ehrenfried Walther von Tschirnhaus[36] (1651–1708). Om cu multe performanțe, mergând de la sticlărie la algebră, acesta a elaborat o metodă interesantă, care, un timp, a dat speranța că s-ar vedea lumina de la capătul tunelului. Ideea fundamentală era simplă. Dacă ecuația cvintică putea fi redusă cumva la ecuații de un grad mai mic (cum ar fi cuartica și cubica), atunci s-ar fi putut folosi soluțiile cunoscute ale acestor ecuații. În particular, Tschirnhaus a reușit prin anumite substituții ingenioase să scape de termenii x^4 și x^3 din ecuație. Din păcate, mai rămânea un obstacol major în metoda lui Tschirnhaus, care a fost curând observat de matematicianul și filozoful Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), iar Tschirnhaus, după un efort susținut depus pentru depășirea lui, și-a recunoscut înfrângerea.

Secolul al XVIII-lea a adus un interes reînnoit și o viguroasă serie de atacuri ale problemei. Francezul Étienne Bézout[37] (1730–1783), care publicase mai multe lucrări asupra teoriei

ecuațiilor algebrice, a adoptat metode oarecum similare cu ale lui Tschirnhaus, dar din nou fără succes. În acest punct, a intrat în cursă cel mai prolific matematician al tuturor timpurilor.

Leonhard Euler[38] (figura 43) a fost atât de productiv, încât ar fi necesar un întreg volum numai pentru a reproduce lista publicațiilor sale. Corpusul lucrărilor lui de matematică și fizică matematică constituie circa o treime din toate lucrările publicate în aceste domenii în ultimele trei sferturi ale secolului al XVIII-lea. Euler a emis ipoteza că soluția cvinticei ar putea fi exprimată în funcție de patru mărimi și a concluzionat pe un ton optimist: „Se poate presupune că dacă eliminarea ar fi făcută cu grijă, ea ar putea conduce la o ecuație de gradul 4." Cu alte cuvinte, el credea în mod optimist că problema putea fi redusă la una care fusese deja rezolvată. Această filozofie generală este o caracteristică a progreselor în matematică. Într-o veche anecdotă, un matematician și un fizician sunt întrebați ce-ar face dacă ar trebui să-și calce pantalonii, dar, deși ar dispune de un fier de călcat, priza electrică s-ar afla în camera alăturată. Amândoi răspund că ar lua fierul de călcat în cea de-a doua cameră și l-ar băga în priză acolo. Apoi sunt întrebați ce-ar face dacă s-ar afla de la bun început în camera unde se găsește priza. Fizicianul răspunde că ar băga fierul direct în priză. Matematicianul, pe de altă parte, spune că ar duce fierul de călcat în camera fără priză, din moment ce problema a fost deja rezolvată.

Figura 43

În ciuda optimismului său, Euler nu a reușit să rezolve cvintica generală. Ajunse totuși să arate că anumite cvintice particulare, cum ar fi $x^5 - 5px^3 + 5p^2x - q = 0$ (unde p și q sunt numere date), pot fi rezolvate printr-o formulă. Aceasta lăsa ușa deschisă pentru potențiale strădanii viitoare. Următorul la rând a fost

suedezul Erland Samuel Bring[39] (1736–1798). De meserie profesor de istorie la Universitatea din Lund, Bring avea drept distracție favorită matematica. Și ce altă enigmă îl putea atrage mai mult decât cvintica? El a făcut ceea ce părea a fi un pas uriaș spre găsirea soluției. A găsit o transformare care putea reduce ecuația cvintică generală ($ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$) la forma mult mai simplă $x^5 + px + q = 0$. Din păcate, această formă mult mai scurtă și aparent mult mai abordabilă a continuat să prezinte un obstacol de netrecut și, în plus, remarcabila transformare a lui Bring a trecut complet neobservată, urmând a fi redescoperită în mod independent în secolul al XIX-lea de către matematicianul englez Geoge Birch Jerrard.

Alte trei încercări, făcute de matematicieni lucrând simultan în trei țări diferite, au eșuat în a produce vreo soluție. Totuși, lucrările lor, de mare substanță, au introdus în joc o nouă și pasionantă idee. În particular, ei au arătat că proprietățile permutărilor presupuselor soluții puteau avea ceva de spus în privința posibilității de soluționare a ecuației printr-o formulă. Cum acesta a fost, din punct de vedere istoric, primul pas înspre realizarea unei conexiuni între soluțiile ecuațiilor și conceptul de simetrie, voi da o scurtă explicație a principiului de bază. Să luăm, de exemplu, ecuația pătratică $ax^2 + bx + c = 0$ (unde *a, b, c* sunt numere cunoscute). Se poate ușor arăta că dacă cele două soluții ale ecuației (date de formula de la pagina 73) sunt notate x_1 și x_2, atunci atât suma $x_1 + x_2$ a soluțiilor, cât și produsul lor x_1x_2 pot fi exprimate în funcție de coeficienții *a*, *b*, *c* (vezi Anexa 7). Mai exact, $x_1 + x_2 = -b/a$, iar $x_1x_2 = c/a$. Cu alte cuvinte, în ecuația $x^2 - 9x + 20 = 0$, suma celor două soluții este egală cu 9, iar produsul lor este egal cu 20. Formula de rezolvare din pagina 73 poate fi ea însăși exprimată (Anexa 7) ca o combinație de $x_1 + x_2$ și x_1x_2:

$$\frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right].$$

Punctul important care trebuie notat aici este că această expresie este simetrică la schimbarea între ele a celor două

soluții x_1 și x_2 – formula rămâne neschimbată la permutarea acestora. Întrebarea pusă de francezul Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) și de englezul Edward Waring[40] (1736–1798) a fost dacă soluția cvinticii – și, în general, a unei ecuații de orice grad – nu putea fi exprimată printr-o expresie asemănătoare, simetrică. În principiu, aceasta putea conduce la găsirea unei formule de rezolvare. Ideea a fost preluată de persoana pe care Napoleon Bonaparte o considera „înalta piramidă a științelor matematice" – Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).

Lagrange (figura 44) s-a născut la Torino[41], în Italia de astăzi, dar familia lui era parțial de origine franceză pe linie paternă, iar el se considera „mai mult" francez decât italian. Tatăl său, care inițial fusese bogat, reușise să risipească toată averea familiei în jocuri de bursă, lăsându-și fiul fără nici o moștenire. Ulterior, Lagrange și-a descris catastrofa economică drept cel mai bun lucru care i se întâmplase vreodată: „Dacă aș fi moștenit vreo avere, probabil nu mi-aș fi bătut capul cu matematica."

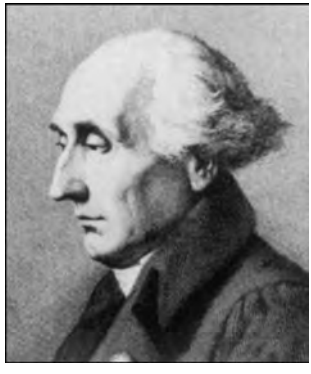


Figura 44

În valoroasa sa lucrare (publicată la Berlin) *Traité de la résolution numerique des équations de tous les degrés*, Lagrange a trecut pentru prima oară în revistă contribuțiile lui Bézout, Tschirnhaus și Euler. El a arătat apoi că toate trucurile prin care se obținuseră soluțiile ecuațiilor liniară, pătratică, cubică și cuartică puteau fi înlocuite printr-un procedeu unitar. Aici a urmat însă o surpriză neplăcută. Pentru gradele doi, trei și patru, ecuațiile fuseseră rezolvate prin reducere la o ecuație de ordin imediat inferior (de ex., reducând cuartica la o cubică etc.) Când s-a încercat aplicarea aceluiași procedeu asupra cvinticei, s-a întâmplat ceva neobișnuit. Ecuația rezultantă, în loc să fie o cuartică, s-a dovedit a fi de grad șase! Metoda care funcționase perfect pentru gradele doi, trei și patru eșuase

complet în cazul cvinticei. Dezamăgit, Lagrange a conchis: „Este deci improbabil ca această metodă să conducă la rezolvarea cvinticei – una din cele mai celebre și importante probleme ale algebrei."

Ca o cale de ieșire din impas, Lagrange a introdus o metodă mai generală de analizare a permutărilor. Amintiți-vă că permutările sunt operații care produc diverse aranjamente ale obiectelor, cum ar fi transformarea lui *ABC* în *BAC* sau *CBA*. Lagrange a făcut importanta descoperire că proprietățile ecuațiilor și rezolvabilitatea lor depind de anumite simetrii ale soluțiilor, obținute în urma permutărilor.

Dar chiar și noile lui idei, așa deschizătoare de drumuri cum erau ele, s-au dovedit insuficiente pentru rezolvarea cvinticei. Rămânând optimist că această analiză va duce la strict necesara descoperire ce trebuia făcută, el scria: „Sperăm să revenim altă dată la această chestiune și suntem mulțumiți de a fi pus bazele unei teorii care pare a fi nouă și generală." Așa cum istoria avea să noteze, Lagrange n-a mai revenit niciodată asupra cvinticei. Cu două zile înaintea morții sale, și-a rezumat astfel viața: „Cariera mea a ajuns la capăt; am dobândit ceva renume în matematică. N-am urât pe nimeni, nici n-am făcut rău nimănui; pentru mine, e bine să ajung la sfârșit."

În aceeași perioadă, mai exista o problemă algebrică discutată în cercurile matematice, iar ea a avut implicații asupra încercărilor de rezolvare a cvinticei. Întrebarea care se punea era următoarea: Au oare toate ecuațiile (de orice ordin) cel puțin o soluție? De exemplu, cum știm dacă există vreo valoare a lui x care satisface relația $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 19x + 253 = 0$? Mai precis, dacă avem o ecuație de grad n (unde n poate fi orice număr 1, 2, 3, 4, …) și le permitem soluțiilor să fie numere reale sau complexe (conținând pe $i = \sqrt{-1}$, câte soluții există? Cunoaștem deja răspunsul în cazul ecuației pătratice – există exact două soluții. Ce se întâmplă însă pentru $n = 5$ sau $n = 17$? Deși mulți matematicieni, inclusiv Leibniz, Euler și Lagrange, au încercat să dea un răspuns, concluzia definitivă a rămas în seama contabilului elvețian Jean-Robert Argand (1768–1822)

și a bărbatului recunoscut drept „prințul matematicienilor“ – Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855; figura 45).

Geniul lui Gauss fusese recunoscut[42] încă de la vârsta de șapte ani, când reușise să adune instantaneu în minte numerele întregi de la 1 la 100, observând pur și simplu că totalul se obține din cincizeci de perechi de numere, fiecare pereche având suma 101. În dizertația sa doctorală din 1799, Gauss a făcut prima demonstrație a ceea ce a devenit cunoscut ca *teorema fundamentală a algebrei* – afirmația că orice ecuație de gradul *n* are exact *n* soluții (care pot fi numere reale sau complexe). Acea primă demonstrație conținea anumite lacune logice, dar el a mai făcut de-a lungul vieții încă trei, toate riguroase. Demonstrația lui Argand[43], publicată în 1814, a fost, de fapt, prima corectă.

Figura 45

Teorema fundamentală a algebrei spune, fără ambiguitate, că ecuația cvintică generală trebuie să aibă cinci soluții. Puteau fi ele însă găsite printr-o formulă? În același an în care și-a publicat prima demonstrație a teoremei fundamentale, Gauss și-a exprimat scepticismul[44] în legătură cu rezolvarea printr-o formulă a ecuației cvintice: „Eforturile numeroșilor geometri ne spun că au rămas puține speranțe de a ajunge vreodată la rezolvarea algebrică a ecuației generale, așa că această rezolvare pare din ce în ce mai imposibilă și contradictorie.“ Dar apoi el a adăugat o notă interesantă: „Poate că nu va fi greu să se demonstreze, cu toată rigoarea, imposibilitatea pentru gradul cinci.“ Gauss nu avea să mai publice niciodată vreun rând pe această temă.

Eșecurile repetate suferite pe parcursul a peste două secole de vânătorii cvinticei l-au determinat pe istoricul francez al matematicii Jean Étienne Montucla[45] (1725–1799) să folosească niște metafore militare pentru a descrie atacurile date asupra

ei: „Scările sunt ridicate peste tot în jur, dar, închisă în ultima-i redută, problema se apără cu disperare. Cine va fi norocosul geniu care va conduce asaltul decisiv împotriva ei sau o va sili să capituleze?“

Printr-o altă coincidență istorică, seria finală și concludentă de ofensive împotriva cvinticei era pe punctul să înceapă exact în anul morții lui Montucla. La fel ca în cazul cubicei și al cuarticei, ea a fost declanșată de un italian.

Figura 46

Paolo Ruffini[46] (1765–1822; figura 46) s-a născut la Valentano, în Italia. Era fiul medicului Basilio Ruffini și al Mariei Francesca Ippoliti. Familia s-a mutat în Reggio, lângă Modena, pe vremea când Ruffini avea zece ani, Modena fiind locul unde a studiat el matematica, medicina, literatura și filozofia, luându-și diploma în 1788. Extraordinar de versatil, Ruffini a început să practice medicina și, în același timp, să predea matematica. Ca urmare a Revoluției Franceze, vremurile deveniseră foarte nesigure. Armata franceză comandată de Napoleon Bonaparte cucerea un oraș italian după altul, ocupând Modena în 1796. Ruffini a fost inițial numit ca reprezentant în Consiliul Inferior al Republicii Cisalpine instituite de Napoleon, dar și-a pierdut postul de profesor după ce a refuzat să jure credință noii republici. În mod curios, realizările sale cele mai importante provin din exact această perioadă, de mari tulburări. El susținea a fi demonstrat că ecuația cvintică generală nu poate fi rezolvată printr-o formulă implicând doar simplele operații de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și extragere de radicali.

Aici trebuie să ne oprim o clipă, pentru a aprecia implicațiile afirmației lui Ruffini. Formula de rezolvare a ecuației pătratice fusese esențialmente cunoscută încă din vremurile babiloniene. Formula cubicei fusese descoperită de dal Ferro, Tartaglia și

Cardano. Ferrari dăduse soluțiile cuarticei. Toate aceste formule presupuneau aplicarea celor patru operații aritmetice de bază și extrageri de radicali. Au urmat apoi două secole și jumătate de așteptări înșelate, în timpul cărora câțiva dintre cei mai strălucițimatematicieni au încercat zadarnic să găsească o asemenea formulă pentru cvintică. Acum Ruffini pretindea că putea demonstra că, oricât s-ar încerca, ecuația cvintică nu putea fi rezolvată printr-o formulă de acest tip. Aceasta reprezenta o adevărată revoluție în modul de a gândi ecuațiile. Matematicienii se obișnuiseră cu faptul că anumite ecuații sunt foarte greu de rezolvat, dar demonstrația lui Ruffini părea a avea menirea să arate că, în cazul cvinticei, eforturile lor erau condamnate din start.

Ruffini și-a publicat demonstrația într-un tratat în două volume, intitulat *Teoria generale delle equazioni* (*Teoria generală a ecuațiilor*), care a apărut în 1799. Ea era însă extrem de complicată, raționamentul întortocheat făcând-o greu de urmărit pe parcursul celor 516 pagini ale tratatului. Deloc surprinzător, reacția lumii matematice a fost, în cel mai mai bun caz, una de scepticism și suspiciune. Cam prin anul 1801, Ruffini i-a trimis lui Lagrange un exemplar din *Teoria*, dar nu a primit nici un răspuns. Fără să se simtă descurajat, i-a trimis un al doilea exemplar, scriindu-i:

> Nefiind sigur că mi-ați primit cartea, vă trimit un alt exemplar. Dacă am greșit în demonstrația mea, dacă am spus un lucru pe care-l credeam nou, dar nu este, în fine, dacă am scris o carte inutilă, vă rog să mi-o spuneți sincer.

Lagrange nu i-a răspuns nici la această scrisoare. Ruffini a încercat o ultimă oară, în 1802, începând prin a lăuda opera lui Lagrange:

> Nimeni nu are mai mult dreptul… să primească această carte, pe care-mi iau libertatea să v-o trimit… Scriind-o, am avut drept scop principal demonstrarea imposibilității rezolvării ecuațiilor de grad mai mare decât patru.

Tot nici un răspuns.

Dezolat de primirea făcută cărții sale, Ruffini a încercat să publice, în 1803 și 1806, variante mai scurte și oarecum mai puțin încâlcite ale acestei demonstrații. De asemenea, a discutat-o cu confrații săi matematicieni Gianfrancesco Malfatti (care publicase un tratat asupra cvinticei în 1771) și Pietro Paoli. Aceste ultime conversații au dus la o versiune finală a demonstrației, publicată în 1813 în articolul „Considerații asupra rezolvării ecuațiilor algebrice generale". Din păcate, nici această demonstrație, care se voia mai transparentă, nu a făcut vâlvă în comunitatea matematică.

Într-un raport către rege, intitulat „Raport istoric asupra progresului științelor matematice după 1709", matematicianul și astronomul francez Jean-Baptiste Joseph Delambre[47] (1749–1822) a menționat pe scurt contribuțiile lui Ruffini, folosind însă un limbaj mai degrabă dubitativ: „Ruffini își propune să demonstreze că rezolvarea este imposibilă." Exasperat, Ruffini protestează pe loc: „Nu mi-am propus să demonstrez, ci am demonstrat cu adevărat." Nici aceasta nu a dus la o acceptare generală a demonstrației lui Ruffini din partea contemporanilor și urmașilor săi. Mai rău încă, Delambre i-a explicat lui Ruffini că era inutil să aștepte un răspuns definitiv, deoarece „indiferent de decizia pe care referenții dumneavoastră [matematicienii Lagrange, Lacroix și Legendre] ar fi luat-o [cu privire la validitatea demonstrației], ei trebuie să depună un efort considerabil fie pentru a-și motiva acordul, fie pentru a vă respinge demonstrația". Din anumite comentarii pe care Lagrange i le-a făcut la bătrânețe savantului și farmacistului Gaultier de Claubry, putem deduce că, deși fusese în general impresionat de lucrarea lui Ruffini, nici măcar el nu era intelectualicește înclinat să accepte un concept atât de revoluționar, precum imposibilitatea de a rezolva cvintica printr-o formulă. În consecință, Lagrange n-a făcut niciodată vreo declarație publică despre demonstrația lui Ruffini.

Disperat, Ruffini și-a trimis demonstrația la Societatea Regală din Londra. A primit un răspuns politicos, care spunea că, deși câțiva membri care-i citiseră lucrarea o găseau satisfăcătoare,

politica societății nu era de a publica aprobări ale unor demonstrații. Singurul matematician distins care a acordat credit rezultatului lui Ruffini a fost Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Productivitatea lui Cauchy a fost atât de prodigioasă (el a publicat stupefiantul număr de 789 de lucrări), încât la un moment dat a trebuit să-și fondeze propria sa revistă. Într-o scrisoare primită de Ruffini cam cu șase luni înainte de moartea sa, Cauchy, în general rezervat cu complimentele[48], scria:

> Memoriul dumneavoastră asupra rezolvării generale a ecuațiilor este o operă care mi-a părut totdeauna demnă de atenția matematicienilor și care, în opinia mea, demonstrează complet insolvabilitatea ecuațiilor de grad mai mare decât patru… Mai adaug că lucrarea dumneavoastră asupra insolvabilității este tocmai titlul unei conferințe pe care am ținut-o în fața mai multor membri ai Academiei.

Chiar și cu aprecierea lui Cauchy, demonstrația lui Ruffini n-a devenit niciodată nici larg cunoscută, nici acceptată. Majoritatea matematicienilor continuau să găsească argumentele lui atât de încurcate, încât le era cu neputință să le judece corectitudinea.

A demonstrat însă cu adevărat Ruffini insolvabilitatea cvinticei printr-o formulă conținând doar operații simple? Cu înțelepciunea noastră de acum, putem spune că demonstrația lui n-a fost completă. Continua să aibă o lacună semnificativă, acolo unde Ruffini făcuse o presupunere, fără a observa că ea trebuia demonstrată, și se mulțumise să noteze că orice altă presupunere ar conduce la o situație mai complicată, așa încât „o putem abandona cu totul". Această imperfecțiune nu răpește însă nimic din originalitatea descoperirii sale. În fapt, nici unul dintre contemporanii lui Ruffini n-a localizat lacuna demonstrației. Lui Ruffini i se datorează o schimbare revoluționară în abordarea ecuațiilor. În loc să se mai încerce rezolvarea cvinticei, eforturile aveau să fie depuse în sens invers, pentru demonstrarea imposibilității ei de rezolvare.

Când ajungem astăzi să evaluăm opera lui Ruffini, realizăm că meritul lui nu este doar cel de a fi schimbat ideile asupra

ecuației cvintice. Mai mult, a împins cu un pas mai departe relațiile dintre soluțiile cubicei și cuarticei și anumite permutări. Aceasta a marcat începutul tranziției de la algebra tradițională, care se ocupă doar de numere, spre rădăcinile teoriei grupurilor, care implică operații între elemente de orice fel. Reamintim că elementele grupurilor pot fi de absolut orice tip, de la numere întregi la simetriile corpului omenesc. Nașterea algebrei abstracte se întrevedea la orizont.

Ruffini fusese totdeauna excesiv de conștiincios. A refuzat o dată o catedră la Padova fiindcă nu voia să părăsească familiile pe care le trata ca medic. Infinit de devotat pacienților săi, el a contractat o febră tifoidă severă în timpul epidemiei din 1817–1818. Și s-a folosit de această experiență traumatizantă pentru a scrie *Memoriu asupra tifosului contagios.* Deși foarte slăbit, a continuat să-și viziteze pacienții și nu a renunțat la cercetări matematice. În aprilie 1822, a făcut brusc pericardită cronică și a murit în luna următoare. Ciudat, după moartea sa, realizările i-au fost aproape uitate și, cu excepția lui Cauchy, matematicienii care i-au urmat au trebuit să-i redescopere ideile.

Aceasta era situația în momentul apariției a doi tineri, poate cele mai tragice figuri din istoria matematicii. Norvegianul Niels Henrik Abel și francezul Évariste Galois erau pe punctul să schimbe pentru totdeauna cursul algebrei. Poveștile vieților acestor oameni remarcabili sunt atât de sfâșietoare încât mă simt îndemnat să le prezint în detaliu, în următoarele două capitole.

4
Matematicianul chinuit de sărăcie

Celebrul roman *Poveste de iubire* al lui Erich Segal începe astfel: „Ce să spui despre o fată de douăzeci și cinci de ani care a murit? Că era frumoasă și că strălucea, că îi plăceau Mozart și Bach. Și Beatles, și eu.“ Acest trist rezumat ar putea fi cu ușurință parafrazat pentru Évariste Galois (1811–1832) și Niels Henrik Abel (1802–1829). Pentru Galois, el ar trebui să sune cam așa: „Ce să spui despre un băiat de douăzeci și unu de ani care a murit? Că era romantic și genial, că-i plăcea matematica. Și a fost doborât de neînțelegere și autodistrugere.“ Sau, pentru Abel: „Ce să spui despre un băiat de douăzeci și șapte de ani care a murit? Că era timid și genial, că-i plăceau matematica și teatrul. Iar sărăcia l-a condamnat la moarte.“ Matematicianul suedez Gösta Mittag-Leffler (1846–1927) descria realizările matematice ale lui Abel[1] în cuvintele: „Cele mai bune lucrări ale lui Abel sunt adevărate poeme lirice, de o sublimă frumusețe… ridicate mult deasupra platitudinii vieții și provenind mai direct din esența sufletului decât creațiile oricărui poet obișnuit.“ Marele matematician austriac Emil Artin (1898–1962) scria despre Galois[2]: „Încă din tinerețea mea matematică, m-am aflat sub vraja teoriei clasice a lui Galois. Vraja aceasta m-a silit să revin la ea iarăși și iarăși, de nenumărate ori.“ Într-adevăr, genialitatea celor doi ar putea fi comparată cu o supernovă – o stea explodând, care pentru un scurt răstimp face să pălească sclipirea tuturor miliardelor de stele din galaxia care o găzduiește.

Abel – primii ani

Niels Henrik Abel s-a născut pe 5 august 1802. Era al doilea fiu al unui pastor luteran, Søren Georg Abel, și al Annei Marie Simonsen, fiica unui comerciant maritim (figura 47 arată siluetele părinților lui Niels Henrik). La câțiva ani după nașterea lui Abel, mama sa a relatat că născuse prematur cu trei luni și că dăduse semne de viață doar după ce fusese îmbăiat în vin roșu. Neverosimila combinație dintre un tată provenind dintr-o lungă serie de oameni în sutană și o femeie de o remarcabilă frumusețe, a cărei pasiune pentru desfătările lumești era cunoscută, nu promitea o căsătorie fericită. Înainte ca Niels să împlinească doi ani, tatăl lui a ocupat un post în satul Gjerstad, înlocuindu-l acolo ca preot pe propriul său tată. Norvegia, care pe atunci făcea parte din Danemarca, era constant în umbra războiului, întâi pe mare, cu flota engleză, apoi pe uscat, cu Suedia. Rezultatele blocadei căilor maritime ale Norvegiei de către flota engleză au fost devastatoare. Toate exporturile de lemn pentru construcții s-au oprit la jumătatea anului 1808, iar comercializarea grânelor din Danemarca devenise atât de primejdioasă, încât se redusese și ea aproape la zero. Foametea și moartea s-au extins asupra Norvegiei în 1809. Pastorul Abel a reușit cu greu să combată foametea în propria-i parohie, convingându-i pe oamenii din Gjerstad să mănânce carnea de cal, care fusese tabu până atunci.

Figura 47

Niels Henrik a fost educat de tatăl său, la vicariat, până la vârsta de 13 ani. Pastorul și-a asumat cu seriozitate responsabilitatea acestei educații timpurii. Mai exact, a pregătit un manual scris de mână, pentru uzul copiilor săi. Cartea conținea gramatică, geografie, istorie și matematică. În mod surprinzător, prima pagină ce aborda subiectul adunării aritmetice (figura 48) conținea o eroare colosală: $1 + 0 = 0$! Din fericire, lumea matematicii nu și-a pierdut una dintre stelele cele mai

Figura 48

strălucitoare din pricina acestei dezinformări timpurii. În 1815, Niels Henrik a fost trimis la Școala Episcopală din Christiania (orașul Oslo de astăzi). Viața tot mai degradată dintr-o familie în care ambii părinți alunecau din ce în ce mai mult spre alcoolism, iar mama nu-și drămuia favorurile sexuale a grăbit probabil plecarea de acasă a băiețelului. Tatăl lui scria: „Fie ca Dumnezeu să-l aibă în pază! Nu-l trimit însă fără neliniște în suflet în lumea asta depravată."

Niels Henrik a intrat în Școala Episcopală pe la începuturile istoriei acestei instituții. Cu câțiva ani înainte, deschiderea Universității din Christiania îi răpise Școlii Episcopale cei mai buni profesori, lăsându-i acolo doar pe cei nepregătiți. Mai ales profesorul de matematică, un anume Hans Peter Bader, era o brută lipsită de inimă, care-i teroriza pe copii și deseori își umplea elevii de vânătăi. Notele lui Niels Henrik au fost la început satisfăcătoare, chiar dacă el manifesta destul de puțin interes în lungile și pustiile zile de școală. Avea tendință să cadă în depresie atunci când nu era în compania prietenilor, autodiagnosticându-se corect mai târziu: „Întâmplarea face să fiu astfel construit, încât mi-e cu totul imposibil – sau, în orice caz, foarte greu – să accept singurătatea. Devin destul de melancolic și n-am nici un chef de lucru." Atunci, ca și în anii ulteriori, marea lui scăpare de sub povara inevitabilelor plictiseli ale vieții a fost teatrul. Acolo, el uita de sine și se contopea cu personajele, nemaifiind nevoit să se lupte cu problemele pentru a căror rezolvare nu avusese niciodată norocul unei călăuziri adecvate. Niels Henrik era timid și nesigur, relațiile sale cu sexul opus rămânând foarte limitate, nu numai în timpul anilor de școală, ci până la moarte. Spre sfârșitul lui 1816, performanțele sale școlare ajunseseră pe o pantă descendentă și, după mai multe bătăi primite de la Bader, fusese nevoit să întrerupă cursurile pentru o scurtă perioadă. Notele lui deveniseră atât de mici, încât în 1817 nu i s-a îngăduit să treacă clasa decât

provizoriu. În noiembrie 1817, un eveniment fatal petrecut la Școala Episcopală avea să marcheze o întorsătură spectaculoasă în viața lui Abel. Pe 16 noiembrie, un elev, Henrik Stoltenberg, s-a îmbolnăvit de febră nevroasă însoțită de tifos. El a murit o săptămână mai târziu. Opt dintre colegii de clasă ai lui Stoltenberg au declarat în scris că detestatul profesor de matematică Bader nu numai că-l lovise crunt pe elev cu pumnii, dar continuase să-l bată și când bietul Stoltenberg zăcuse neputincios pe podea. Deși bătaia n-a fost confirmată drept cauză a decesului de către medicul legist, Bader a fost concediat.

Drept suplinitor, școala l-a angajat pe Bernt Michael Holmboe (1795–1850), el însuși absolvent al Școlii Episcopale, care era cu numai șapte ani mai în vârstă decât Abel. Holmboe a introdus o nouă programă, care începea cu înțelegerea deplină a simbolurilor matematice. Nu i-a trebuit mult ca să descopere că visul oricărui profesor de matematică se realizase în clasa lui – avea pe mână un geniu. După ce a parcurs fluierând programa standard, Abel a început, cu încurajarea entuziastă și inspiratoare a lui Holmboe, să se cufunde în lucrările originale ale marilor matematicieni Euler, Newton, Laplace, Gauss și, mai ales, Lagrange. Holmboe nu-și putea stăpâni admirația. În foaia de caracterizare a lui Abel pe anul 1819, nu a ezitat să exclame: „Un geniu matematic remarcabil!“ Iar în anul următor, a mers și mai departe. Evaluarea sa a încălcat toate normele școlare: „La această genialitate incredibilă, el adaugă un interes și o ardoare insațiabile pentru matematică, așa încât, foarte probabil, dacă va trăi, va deveni unul dintre marii matematicieni.“ Ultimele cuvinte fuseseră scrise peste altele, șterse, care pot fi însă descifrate: „cel mai mare matematician al lumii“. După toate aparențele, conducerea școlii insistase ca Holmboe să-și tempereze lauda. Cuvintele „dacă va trăi“ s-au dovedit a fi funest de profetice.

Un geniu luptător

În timpul ultimului său an de școală, Abel a făcut prima sa încercare de a-și deschide aripile – și ce încercare! Cu temeritatea care-i caracterizează doar pe tineri la prima lor

aventură pe teritorii nefamiliare, el a încercat nimic mai puțin decât rezolvarea ecuației cvintice. Aceasta era problema cu care se luptaseră timp de aproape trei sute de ani cei mai buni matematicieni ai Europei, iar acum un puști de liceu pretindea că ar fi rezolvat-o. Abel i-a arătat soluția lui Holmboe, care nu găsi nimic greșit în ea. Lipsindu-i încrederea unui matematician recunoscut, Holmboe le-a prezentat-o unor confrați, Christofer Hansteen și Søren Rasmussen, de la Universitatea din Christiania. Nici ei nu au găsit vreo eroare. Realizând importanța descoperirii, Hansteen s-a hotărât să-i înainteze lucrarea celui mai prestigios matematician scandinav al epocii – Ferdinand Degen, din Copenhaga – pentru a fi publicată de către Academia daneză.

Degen era o persoană pragmatică, preferând să greșească fiind prea prudent. Chiar dacă nu a găsit nici o eroare în rezolvarea lui Abel, el i-a cerut acestuia să-i trimită „o deducere mai detaliată a rezultatului său, precum și o ilustrare numerică" a metodei – de exemplu, o rezolvare a ecuației $x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$. La urma urmelor, șansele *a priori* ca un discipol al Școlii Episcopale să rezolve una dintre cele mai celebre probleme ale matematicii nu erau foarte mari. În timp ce încerca s-o aplice în cazuri particulare, Abel a descoperit, spre consternarea sa, că metoda era, de fapt, incorectă. Departe însă de a semnala sfârșitul căutării sale, acest impas temporar urma să-l conducă pe Abel spre o monumentală izbândă. Degen, în orice caz, a fost suficient de impresionat pentru a-i oferi lui Abel sfatul său. Lui Degen, studiul ecuațiilor i se părea a fi „un subiect steril". El i-a sugerat lui Abel să-și concentreze eforturile mai degrabă asupra noului domeniu al integralelor eliptice (tipuri speciale de instrumente matematice din analiză, astfel numite deoarece pot fi folosite pentru a calcula lungimea unui arc de elipsă). Acolo, spunea Degen, „un cercetător serios, cu o abordare adecvată…, ar putea descoperi o Strâmtoare a lui Magellan conducând spre vastele întinderi ale unui imens ocean analitic".

Exact când geniul matematic al lui Abel începuse să strălucească, cerurile se întunecau pe frontul familial. Anii 1818–20 aveau să devină din ce în ce mai apăsători pentru Abel. Tatăl

său, pastorul, reușise să se facă ales în Storting (parlament) pe 10 decembrie 1817, dar acest eveniment, aparent prestigios, s-a transformat într-un dezastru complet. La început, foarte energicul parlamentar nou-ales a înaintat câteva proiecte de legi asupra educației, care au fost încununate de succes. În particular, el a jucat un rol important în înființarea unei școli veterinare. Dar poate că datorită judecății afectate de băutura excesivă și a unei insațiabile pofte de autoafirmare a ajuns să comită ceva echivalent cu o sinucidere politică. În timpul unei sesiuni agitate, pe 2 aprilie 1818, i-a acuzat în mod neașteptat pe doi deputați de a-l fi închis pe nedrept pe fostul director al unei întreprinderi metalurgice. Acuzațiile s-au dovedit total nefondate, marcând astfel începutul căderii pastorului Abel. Lui Søren Georg Abel i s-a dat o ultimă șansă să-și ceară scuze, pe care el a avut încăpățânarea s-o refuze. În toamna lui 1818, pastorul dezamăgit și căzut în dizgrație s-a întors în Gjerstad. Era din ce în ce mai înclinat să-și înece supărările în alcool, ceea ce n-a dus decât la o rapidă deteriorare a sănătății sale. Când a murit, în 1820, nimeni din Gjerstad nu a fost prea mâhnit. Se spune că văduva, moralmente deficitară, i-ar fi primit stând în pat pe vizitatorii veniți s-o consoleze, străjuită de un slujitor ale cărui servicii depășeau treburile gospodărești.

Anne Marie și cei cinci frați ai lui Niels Henrik rămaseră cu o mică pensie, complet insuficientă pentru satisfacerea nevoilor personale. Problema banilor care să-i permită lui Abel să-și încheie educația nu putea fi nici măcar ridicată, darămite rezolvată. Prin circumstanțe aproape miraculoase, Abel a reușit, totuși, să intre la universitate în 1821. Într-un mediu în care contactul personal dintre studenți și profesori era în general descurajat, cei din urmă adoptând o atitudine distantă și rece, nu mai puțin de trei profesori s-au oferit să-l ajute financiar pe Abel, din resursele lor destul de limitate. Generozitatea aceasta a continuat până în 1824, când el primi, în sfârșit, o bursă din care să trăiască. În primul său an universitar, Abel a fost un oaspete frecvent și bine-venit în casa profesorului Christopher Hansteen. Într-o revistă periodică de-a acestuia și-a publicat el prima lucrare matematică, în 1823. N-a fost

chiar un articol epocal (și nici n-a fost, ca și al doilea articol al lui Abel, pe înțelesul majorității cititorilor revistei). În schimb, al treilea său articol, „Soluția a două propoziții prin intermediul integralelor definite" țintea spre ceea ce mult mai târziu avea să devină baza matematică a radiologiei moderne (pentru care fizicianul Allan Cormack și inginerul electrotehnist Godfrey Hounsfield au primit în 1979 Premiul Nobel pentru Medicină).

Între timp, profesorii Hansteen și Rasmussen căutau neîncetat căi de a-l sprijini pe Abel, în particular facilitându-i călătoriile în străinătate, pentru a-și lărgi orizontul. După ce un astfel de memoriu către Colegiul Academic a dispărut în labirintul birocratic al universității, Rasmussen i-a făcut lui Abel un dar personal, de o sută de taleri, pentru a putea călători în Danemarca spre a-i întâlni pe Degen și pe alți matematicieni danezi. Oricât de neverosimil ar părea, Abel și-a petrecut deci vacanța de vară din 1823 la Copenhaga. Acolo a descoperit că „oamenii de știință cred că Norvegia este simbolul barbariei pure" și a făcut tot ce i-a stat în puteri „pentru a-i convinge de contrariu". Excursia la Copenhaga a mai avut un rezultat neașteptat – Abel a întâlnit pe viitoarea sa logodnică, Christine (poreclită Crelly) Kemp. Prima întâlnire dintre cei doi a avut loc la o serată organizată în casa unui unchi de-al lui Abel. Abel a invitat-o pe Christine la dans, dar spre jena lui și a ei, orchestra a început să cânte ceea ce era noua senzație a momentului – valsul –, pe care nici unul dintre ei nu știa să-l danseze. Deconcertați, cei doi s-au privit preț de câteva minute, apoi au părăsit în tăcere sala de dans. Întreaga relație a lui Abel cu Crelly are în ea ceva misterios. După ce și-a petrecut cu ea Crăciunul din 1824, Abel și-a șocat prietenii de la universitate anunțându-i că se logodise. S-ar părea că el n-a participat niciodată, verbal sau fizic, la vreuna din experiențele erotice care erau tipice pentru viața studențească a capitalei. Logodna la acea vârstă timpurie a ridicat un zid protector, care i-a permis să evite orice alte explicații atunci când ceilalți discutau subiecte legate de femei. Niels Henrik nu s-a căsătorit niciodată cu Christine. Pe vremea aceea, era de neconceput ca cineva să se căsătorească

înainte de a avea mijloacele necesare susținerii unei familii. Din păcate, Abel n-a ajuns niciodată în această situație. La cinci ani după logodnă, pe patul de moarte, copleșit de vină și responsabilitate, Abel avea să-l roage pe bunul său prieten, Baltazar Mathias Keilhau, să aibă grijă de Crelly. „Nu e drăguță", fu auzit spunând. „Are păr roșu și pistrui, dar e o superbă făptură umană." Keilhau, care până atunci nici nu o văzuse niciodată pe Crelly, s-a căsătorit cu ea în 1830, iar cei doi și-au petrecut restul zilelor împreună.

Cvintica

După încercarea sa nereușită de a găsi o formulă de rezolvare a cvinticei, subiectul nu-i mai ieșise niciodată din minte lui Abel. Deși nu ignora sfatul lui Degen, de a face studii de pionierat în două alte domenii ale matematicii, obsesia cvinticei persista. La întoarcerea sa de la Copenhaga, s-a hotărât deci să revadă acest subiect cu un ochi proaspăt. Dar în loc să atace din nou problema în ideea de a găsi o formulă, era acum hotărât să arate că ecuația nu se putea rezolva printr-o formulă. Amintiți-vă că exact asta pretindea Ruffini că ar fi demonstrat în perioada 1799–1813, fără să bage de seamă că demonstrația sa conținea o serioasă lacună. Cum rezultatul lui Ruffini nu avusese parte de multă publicitate, Abel nu era la curent cu el în 1823. După câteva luni de lucru intens, studentul de 21 de ani din îndepărtata Norvegie a pus capăt unei căutări vechi de secole. El a reușit să demonstreze, riguros, fără ambiguitate, că este imposibil de găsit o soluție a ecuației cvintice care să poată fi exprimată sub forma unei formule simple, implicând doar cele patru operații aritmetice și radicali.

Să clarificăm mai întâi ce înseamnă și – la fel de important – ce nu înseamnă demonstrația lui Abel. El a demonstrat că, în cazul ecuației cvintice generale, și în cel al ecuațiilor de grade mai mari, nu poate fi repetat ceea ce se reușise cu ecuațiile pătratice, cubice și cuartice. Cu alte cuvinte, pur și simplu soluția cvinticei nu putea fi dată de o formulă care să înglobeze doar coeficienții. Toate eforturile depuse de nenumărați matematicieni

străluciți fuseseră sisifice. Demonstrația lui Abel nu implică faptul că ecuațiile cvintice nu pot fi rezolvate. Ecuația $x^5 - 243 = 0$, bunăoară, are soluția evidentă $x = 3$, deoarece $3^5 = 243$. Mai mult, chiar ecuația cvintică generală poate fi rezolvată, fie numeric, cu ajutorul calculatorului, fie introducând mijloace matematice mai avansate, cum sunt funcțiile eliptice. Ceea ce a descoperit Abel a fost un neajuns fundamental al algebrei de bază, care se manifesta la încercările de domesticire a cvinticei. Pur și simplu, operațiile bine cunoscute de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și extragere de radicali își ating limita utilității lor atunci când se confruntă cu cvintica. Aceasta a fost o realizare monumentală în istoria matematicii. Ea a schimbat întreaga abordare a ecuațiilor, de la simplele încercări de găsire a soluțiilor la necesitatea de a demonstra dacă, în genere, există sau nu soluții de un anumit tip.

Demonstrația lui Abel este prea științifică[3] pentru a fi reprodusă în detaliu într-un text de popularizare. Cititorii cu înclinații matematice pot consulta o expunere clară în cartea lui Peter Pesic, *Demonstrația lui Abel*. Aici vom nota doar că demonstrația se baza pe instrumentul logic numit *reducere la absurd*. Ideea de bază a acestei metode este de a demonstra o propoziție arătând că propoziția contrară e falsă. Cu alte cuvinte, Abel a presupus că cvintica e rezolvabilă și a arătat că această ipoteză conduce la o contradicție logică.

El era conștient de însemnătatea descoperirii sale. Spre deosebire de lucrările precedente, scrise în inaccesibila norvegiană, a făcut demonstrația nesolubilității cvinticei în franceză, sperând să atragă atenția principalilor matematicieni ai vremii sale. S-a hotărât, de asemenea, să folosească demonstrația drept „bilet de clasa I", socotind că „aceasta ar fi cea mai bună recomandare pe care-aș putea-o avea". Ca urmare, l-a plătit pe editorul Grøndahl din propriul său buzunar (probabil, sărind câteva prânzuri), pentru a scoate articolul sub forma unei broșuri. Pentru a economisi din cheltuielile de tipar, a comprimat acest articol intitulat, *Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré* (*Memoriu asupra ecuațiilor algebrice în*

care se demonstrează imposibilitatea rezolvării ecuației generale de gradul cinci), la numai șase pagini. În schimb, parcimonia lui s-a dovedit costisitoare sub alte aspecte. Versiunea aceasta, foarte prescurtată, aproape telegrafică, a fost atât de opacă pentru majoritatea matematicienilor, încât, deși Abel trimisese exemplare ale broșurii prietenilor săi din Copenhaga și marelui Carl Friedrich Gauss, realizarea lui s-a bucurat de prea puțină atenție. Se pare că Gauss nici nu s-a sinchisit să deschidă broșura lui Abel – după moartea lui, articolul a fost găsit, netăiat pe margini, printre hârtiile sale. Una dintre cele mai mari capodopere ale literaturii matematice nu și-a găsit practic cititorii.

Cam în aceeași vreme, îngerii păzitori ai lui Abel, adică profesorii Hansteen și Rasmussen, au conchis că, pentru ca el să-și folosească întregul potențial, nu mai era cazul ca ei să-l sprijine din punga lor, și așa destul de săracă. Ca urmare, în 1824, ei au solicitat guvernului norvegian o bursă de călătorie pentru Abel, justificându-și neobișnuita cerere prin observația că pentru acest talent extraordinar „o ședere în străinătate, acolo unde se află cei mai de seamă matematicieni, ar contribui nespus de mult la educația lui științifică și școlară". După obișnuitele amânări birocratice, departamentul finanțelor i-a aprobat o bursă modestă. Aceasta a fost o realizare cu adevărat remarcabilă, dată fiind situația financiară deplorabilă a țării la acel moment. Se puneau însă și două condiții importante. Întâi, lui Abel i se cerea să mai rămână în Norvegia încă 18 luni, pentru „a-și continua educația, în special pentru a studia mai departe limbile străine", ca să fie pregătit pentru călătorie. În al doilea rând – mult mai important după cum se va demonstra –, nici o sumă nu-i era alocată ca sprijin financiar după întoarcerea acasă. Această ultimă condiție s-a dovedit a avea consecințe devastatoare.

O experiență europeană

În septembrie 1825, Abel și-a luat în sfârșit rămas-bun de la Crelly, care era pe atunci guvernanta copiilor unei familii din orășelul Son, de lângă Christiania, și a plecat spre Continent,

însoțit de trei prieteni. Doi dinte ei aveau să devină mai târziu geologi, iar al treilea, veterinar. Inițial, la sfatul lui Hansteen, Abel plănuise să-și petreacă timpul la Paris, după o scurtă ședere la Copenhaga. Însă atunci când prietenii săi s-au hotărât să meargă la Berlin, spaima de a fi lăsat singur în Paris l-a convins pe Abel să facă și el un drum până acolo. În acest caz particular, crunta sa teamă de izolare a avut un rezultat fericit. La Berlin, a întâlnit un influent inginer constructor, care avea o mare pasiune pentru matematică și avea să devină cel dintâi admirator, prieten și binefăcător al său. August Leopold Crelle (1780–1855) n-a prea înțeles la început scopul vizitei tânărului norvegian, care abia vorbea germana. Într-o scrisoare către Hansteen, Abel descria astfel cele petrecute:

> A trecut destul de multă vreme până să-i pot lămuri scopul vizitei mele, iar când m-a întrebat ce citisem până acum din matematică, lucrurile au părut să se îndrepte spre un sfârșit trist. Mi-am făcut curaj și i-am menționat operele câtorva dintre cei mai de frunte matematicieni. Atunci a devenit foarte prietenos, după toate aparențele, realmente fericit. A început cu mine o conversație amănunțită, despre diverse probleme dificile, încă nerezolvate. Când am ajuns la cvintică și i-am spus că demonstrasem imposibilitatea de a i se da o soluție algebrică generală, nu i-a venit să creadă și a zis că mă va contrazice. De aceea, i-am dat o broșură, dar a susținut că nu putea vedea justificarea mai multor concluzii ale mele. Și alții spuseseră același lucru, așa că mi-am revizuit lucrarea.

În urma acestei întâlniri, Crelle a fondat o revistă matematică, numită de obicei *Revista Crelle* (numele ei oficial era *Revistă de matematică pură și aplicată*) – prima publicație matematică germană din secolul al XIX-lea. Primul număr al *Revistei Crelle* a apărut în 1826 și conținea nu mai puțin de șase articole semnate de Abel (scrise în franceză și traduse de Crelle). Unul dintre ele expunea ceva mai detaliat și elaborat demonstrația nerezolvabilității cvinticei printr-o formulă simplă. La începutul lui 1826, Abel părea a nu fi încă la curent cu demonstrația lui Ruffini, dar a descoperit-o, probabil, în vara acelui an, prin intermediul unui rezumat al ideilor acestuia, alcătuit de un autor

necunoscut. Într-un manuscris datat 1828 și publicat postum, Abel notează: „Primul și, dacă nu greșesc, singurul de dinaintea mea care a încercat să demonstreze imposibilitatea rezolvării ecuațiilor algebrice este geometrul Ruffini. Dar memoriul lui este atât de complicat, încât e greu de judecat corectitudinea raționamentului său. Mie mi se pare că el nu este totdeauna satisfăcător."

În mijlocul acestor impresionante eforturi științifice, dura realitate a situației sale financiare continua să-l urmărească pe Abel. Din mijloacele extrem de modeste de care dispunea, continua să-și ajute frații. Într-o scrisoare către doamna Hansteen, el scria:

> Dumnezeu să vă binecuvânteze că nu-l uitați pe fratele meu [referindu-se la fratele său Peder]. Mă obsedează ideea că lucrurile ar putea lua o întorsătură proastă pentru el. Dacă ar avea cumva nevoie de mai mulți bani decât are deja, v-aș ruga să-i dați ceva mai mult. Atunci când cei 50 de taleri se vor fi terminat, voi aranja în așa fel încât să primiți mai mulți.

O afacere ceva mai serioasă avea să arunce o umbră întunecată asupra speranțelor și perspectivelor de viitor ale lui Abel. Profesorul Rasmussen a considerat că nu-i mai era cu putință să jongleze cu responsabilitățile didactice și obligațiile sale publice, așa că a demisionat de la universitate pentru a ocupa un post la Banca Norvegiei. Hotărârea lui îi dădea o oportunitate de aur lui Abel, una la care visase dintotdeauna – o numire la universitate. Existau însă doi candidați potențiali pentru acest post: fostul profesor al lui Abel, Holmboe, și tânărul Niels Henrik. Când vestea despre locul vacant a ajuns la urechile tinerilor călători la Berlin, unul din ei, Christian Peter Boeck, aspirantul la cariera de veterinar, i-a scris imediat lui Hansteen:

> Vărul meu Johan Collett îmi scrie despre numirea la bancă a lui Rasmussen. Ce se va întâmpla cu postul lui? Există vreo speranță ca Abel să-l poată obține la întoarcerea sa, sau Holmboe i-o ia înainte? Oricât de rezonabil ar fi acesta sub anumite aspecte, nu pare a fi foarte drept, dat fiind că Abel este, probabil, cu un cap deasupra lui Holmboe.

Scrisoarea a fost scrisă pe 25 octombrie 1825. Membrii facultății s-au întrunit pe 16 decembrie, pentru a discuta și aproba recomandarea pentru noua numire. Ei l-au recomandat pe Holmboe pentru locul vacant. Principalul motiv pentru a-l prefera pe Holmboe în detrimentul lui Abel a fost că acesta din urmă „nu se putea adapta la fel de ușor capacității de înțelegere a tinerilor studenți precum un profesor mai experimentat, de aceea nefiind în stare să prezinte la fel de fructuos partea elementară a matematicii, care este principalul obiect al postului sus-menționat". Acest gen de punere în balanță a talentului didactic și aptitudinii pentru cercetare, drept calificări pentru o numire, nu este neobișnuită. Pot depune mărturie din proprie experiență (am făcut parte din nenumărate asemenea comisii) că discuții de acest gen continuă să caracterizeze numirile universitare chiar și în ziua de azi. În acel caz particular însă, în care unul dintre candidați era, fără discuție, net superior celuilalt, este indubitabil că, în miopia ei, facultatea comisese o serioasă eroare. Neignorând complet caracterul problematic al deciziei luate, facultatea norvegiană conchidea: „Socotim, de asemenea, de datoria noastră să subliniem cât de important este ca studentul Abel să nu fie pierdut din vedere."

Deși avea speranțele spulberate și realiza cât de nesigur îi este viitorul, Abel, cu noblețea care-l caracteriza, a depus toate eforturile pentru a-și păstra intactă prietenia cu Holmboe. Într-o caldă scrisoare către acesta, el scria: „Printre alte vești, mi-a spus că dumneata, prietene, ai fost recomandat să predai în locul lui Rasmussen. Primește felicitările mele cele mai sincere și fii sigur că nici unul dintre prietenii dumitale nu a fost atât de bucuros ca mine. Crede-mă, ți-am dorit întotdeauna o schimbare de situație." Camaraderia dintre Abel și Holmboe a trecut cu bine acest test, ei rămânând prieteni devotați pentru restul vieții lui Abel. Dezamăgit, Abel s-a simțit însă silit s-o informeze pe Crelly că planurile lor de căsătorie trebuiau amânate.

În ciuda acestor circumstanțe tulburi, iarna aceea la Berlin s-a dovedit una dintre cele mai fericite perioade din viața lui Abel. Era extrem de productiv, scriind lucrări importante asupra calculului integral și a teoriei însumării seriilor infinite. Cei

patru viitori oameni de știință nu pierdeau nici o ocazie de a merge la teatru – pasiunea lui Abel – și erau invitați la baluri sau organizau serate proprii. Acestea din urmă, care erau uneori destul de zgomotoase, îl deranjau pe faimosul filozof Hegel, care întâmplător locuia în aceeași clădire. El a fost auzit o dată numindu-și zgomotoșii vecini „urși moscoviți".

La apropierea primăverii, Abel a început să facă planuri de călătorie care să-l ducă spre destinația sa inițială – Parisul. Dar teama de a se vedea despărțit de prietenii lui s-a dovedit iarăși atât de puternică, încât a sfârșit prin a călători mai întâi împreună cu Keihlau la Freiberg, iar apoi împreună cu alți doi prieteni, prin Dresda, Boemia, Viena, nordul Italiei și Elveția, ajungând la Paris abia în iulie 1826.

Parisul

Oricine ajunge la Paris în iulie sau august știe cum arată el. Așa cum a descoperit și Abel curând, toată lumea era în vacanță, departe de oraș. Totuși Parisul era capitala matematică indiscutabilă a lumii, iar Abel aștepta cu nerăbdare ocazia de a se întâlni cu giganții matematici pe care-i venera. La urma urmelor, lucrările lui Cauchy, Laplace și Legendre constituiau principala lectură de seară a sa. În prima scrisoare trimisă din Paris lui Hansteen, Abel exclama exuberant: „Am ajuns, în fine, în centrul tuturor dorințelor mele matematice, la Paris." Nu bănuia că vizita la Paris nu-i va aduce decât dezamăgiri.

Era găzduit de familia Cotte[4], la numărul 41 de pe strada St. Marguerite, care traversa faimosul cartier St. Germain-des-Prés. Pentru suma oarecum exagerată de 120 de franci pe lună, beneficia de o cameră „extrem de simplă", haine curate și două mese pe zi. Stăpânul casei, care după Abel era un „nedemn diletant în matematică", l-a însoțit la prima sa încercare de a se întâlni cu faimosul matematician Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Din păcate, acesta tocmai se urca în trăsură la sosirea lui Abel, iar cei doi n-au putut schimba decât câteva saluturi de politețe. Câțiva ani mai târziu, Legendre avea să ajungă să regrete că

nu vorbise mai mult cu Abel pe când tânărul matematician se mai afla încă la Paris. (În realitate, ei au avut un schimb destul de fructuos de idei în 1829, dar deocamdată era anul 1826, iar bătrânul Legendre n-avea nici o idee cine era Abel.)

În timpul primelor luni petrecute la Paris, Abel a lucrat neîncetat la ceea ce avea să devină un adevărat tur de forță, cunoscut astăzi ca teorema lui Abel. Deși teorema aceasta nu are legătură directă cu cvintica sau cu teoria grupurilor, datorită rolului decisiv pe care l-a jucat în viața lui Abel, încât nici o biografie a sa n-ar fi completă fără ea. Teorema se ocupa de o clasă specială de funcții, numite *funcții transcendente*, și reprezenta o vastă generalizare a unei relații obținute anterior de Euler. Nu e nici o exagerare să spunem că teorema lui Abel a oferit, literalmente, noi perspective lumii matematice. Claritatea și simplitatea intrinsecă a demonstrației lui Abel au fost comparate cu cele ale statuilor clasice ale sculptorului grec Fidias. Originalitatea lui era evidențiată, printre altele, de îndemânarea de care dădea dovadă în întoarcerea pe dos a problemelor. Voi da un exemplu nematematic pentru acest gen de logică a inversării.

Să presupunem că cineva sugerează că unul dintre motivele pentru care armele de foc sunt atât de răspândite în anumite centre urbane este numărul mare al asasinatelor – oamenii achiziționează arme pentru a se autoapăra. Problema s-ar pune însă exact invers dacă altcineva ar afirma că una dintre cauzele frecventelor asasinate este disponibilitatea nerestricționată a armelor. În matematică, putem considera, de exemplu, relația $x = \sqrt[3]{y}$ (citită „x este egal cu rădăcina cubică din y“). Ea arată că, pentru a-l calcula pe x, trebuie să extragem rădăcina cubică din y, ca în $2 = \sqrt[3]{8}$. Relația inversată $y = x^3$ (deci $8 = 2^3$) este echivalentă cu cea precedentă, și totuși cei mai mulți vor fi de acord că a calcula puterea a treia e mult mai ușor decât a manipula rădăcini cubice. Acesta a fost tipul de idee oferit de Abel prin teorema sa, unul care îi scăpase lui Legendre în cei aproape 40 de ani de lucru.

Lucrarea lui Abel s-a dovedit a fi una dintre cele mai lungi publicații ale sale (ea umple 67 de pagini în operele lui complete).

Această remarcabilă lucrare, intitulată *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue des fonctions transcendantes* (*Memoriu asupra unei proprietăți generale a unei clase foarte extinse de funcții transcendente*), conținea atât teoria, cât și aplicațiile. La încheierea ei, Abel abia își putea stăpâni euforia. Extrem de optimist, a depus-o la Academia Franceză de Științe, pe 30 octombrie 1826. Aceasta era lucrarea, gândea, care avea să-i fie pașaportul spre recunoaștere. Abel a fost efectiv prezent la Institutul Franței, la ședința de prezentare a lucrării. A ascultat cu un mare sentiment de împlinire atunci când secretarul academiei, matematicianul Joseph Fourier (1768–1830), i-a făcut o scurtă expunere. Cauchy și Legendre au fost imediat numiți ca referenți, iar Cauchy a primit sarcina să redacteze un raport către academie.

Abel și-a petrecut următoarele două luni la Paris, așteptând cu nerăbdare verdictul. Se simțea din ce în ce mai singur, mai trist și mai anxios: „Deși mă aflu în locul cel mai zgomotos și mai plin de viață de pe continent", îi scria el lui Holmboe, „mă simt de parc-aș fi într-un deșert. Nu cunosc aproape pe nimeni." În parte, probabil că i se părea greu să comunice cu oamenii din cauza stării de melancolie în care cădea atunci când nu era înconjurat de prieteni:

> În ansamblu, francezii nu-mi plac la fel de mult ca nemții; francezii sunt extrem de rezervați față de străini. Este foarte dificil să te apropii de ei, și nici nu sper s-o fac. Fiecare lucrează pentru sine, fără să-i pese de ceilalți. Toți vor să te instruiască, și nimeni nu vrea să învețe. Pretutindeni domnește egoismul cel mai absolut.

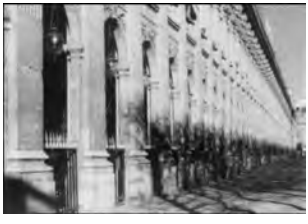


Figura 49

Ca întotdeauna, teatrul rămânea principala lui sursă de amuzament și bucurie: „Nu știu plăcere mai mare decât să văd o piesă de Molière în care joacă Mademoiselle Mars [cea mai bună actriță a timpului, Anne-Françoise-Hippolyte Boutet, cunoscută sub numele de

Mars]. Sincer, sunt extrem de entuziasmat", scria el. Celelalte „atracții" ale Parisului secolului al XIX-lea îl lăsau rece:

> Din când în când vizitez Palais Royal (figura 49), pe care francezii îl numesc un lieu de perdition [un loc de pierzanie]. Vezi acolo des femmes de bonne volonté [femei „de bunăvoință"] în număr mare și ele nu sunt deloc sâcâitoare. Singurul lucru pe care-l auzi este: Voulez-vous monter avec moi? Mon petit ami, petit méchant. [Vrei să vii sus cu mine? Micuțul meu, răutăciosule mic.] Fiind logodit, nu le ascult niciodată și părăsesc Palais Royal fără cea mai mică ispită.

Figura 50

Unul dintre compatrioții întâlniți de Abel la Paris era pictorul danez Johan Gørbitz. Gørbitz lucra în atelierul faimosului pictor de tablouri istorice Jean-Antoine Gros și se afla la Paris din 1809. El a realizat în iarna aceea singurul portret autentic al lui Abel pictat în cursul vieții sale (figura 50). Portretul zugrăvește un tânăr drăgălaș, cu trăsături delicate. Deși mama lui Abel fusese o femeie de o mare frumusețe, nici unul dintre contemporanii săi nu-l descriu ca arătând deosebit de bine. Măgulitorul portret ar putea reprezenta deci tendința spre înfrumusețare a pictorilor vremii.

Poate că cea mai bună imagine a complexului mod de lucru al minții creator-rătăcitoare a lui Abel este dată de carnetul său de notițe parizian. Printre formulele diverselor integrale și expresii cu numere complexe, găsim o menajerie de nonsensuri și fragmente de fraze, care sar neîncetat de la un șuvoi de gânduri la altul. Pagina reprodusă în figura 51, de exemplu, conține (fără nici o ordine particulară) următoarele frânturi de fraze: „…soluția completă a ecuațiilor în care… afurisit… afurisit, ∞ [semnul pentru infinit]"; „Tatăl nostru care ești în Ceruri, dă-mi mie pâinea și berea. Ascultă-mă o dată", referindu-se, poate, la situația sa financiară tot mai proastă; „Vino

la mine, pentru Dumnezeu“; „Draga mea, iubita mea“; „Spune-mi, draga mea Eliza… ascultă… ascultă“, referindu-se fie la iubita lui soră Elizabeth, căreia îi trimisese un dar de la Paris, fie la vreo prietenă intimă, idee implicată de ultimele cuvinte de mai jos: „Soliman al Doilea“, cu referire la sultanul otoman din secolul al XVII-lea – Abel se documentase intens asupra istoriei europene înaintea excursiei sale în Europa; „Vino la mine, scumpa mea“; „de data asta, a mea“; „soluții ale ecuațiilor algebrice“; „Vino la mine cu toată disoluția ta.“

Abel era extrem de optimist în ceea ce privește lucrarea înaintată Academiei, fiind absolut convins că avea să urmeze un raport laudativ. La urma urmei, presupunea el, e cert că acei mari matematicieni aveau să recunoască valoarea lucrării. Ceea ce nu realiza însă era faptul că cei doi matematicieni numiți ca evaluatori erau, din motive diferite, total nepotriviți pentru

Figura 51

acea sarcină. Legendre avea în acel moment 72 de ani și îi lipsea răbdarea să parcurgă un manuscris lung, care era (cu propriile-i cuvinte) „abia lizibil… scris cu o cerneală foarte subțire, cu literele prost alcătuite". Cauchy, pe de altă parte, era în apogeul fazei sale egocentrice, sau, apelând la cuvintele istoricului Eric Temple Bell, „atât de ocupat cu a-și depune propriile ouă și a cloci deasupra lor, încât nu mai avea timp să examineze adevăratele ouă de cuc pe care modestul Abel le lăsase în cuibul lui". Rezultatul acestor circumstanțe nefericite a fost că Legendre nu și-a bătut capul, iar Cauchy a rătăcit memoriul undeva printre vrafurile sale de hârtii, uitând de el. Închipuiți-vă, o adevărată capodoperă – la fel de însemnată, poate, ca și tabloul lui Monet *Impresie*: *Răsărit de soare* pentru dezvoltarea impresionismului – astfel rătăcită și pierdută! Abia doi ani mai târziu avea Legendre să afle de conținutul manuscrisului, dintr-o corespondență cu Abel, întors pe atunci în Norvegia.

Altă persoană care s-a familiarizat în 1829 cu lucrarea lui Abel a fost marele matematician german Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851). Pe 14 martie 1829, el îi scria cu neascuns entuziasm lui Legendre:

> Ce mai descoperire a făcut Herr Abel prin generalizarea integralei lui Euler! S-a mai văzut oare ceva asemănător până acum? Cum este însă cu putință ca descoperirea aceasta, poate cea mai importantă din secolul nostru, să fi scăpat atenției dumneavoastră și a colegilor dumneavoastră, după ce a fost comunicată Academiei cu peste doi ani în urmă?

Scuza șchioapă, invocând caracterul „abia lizibil" al manuscrisului, a fost prezentată de Legendre ca răspuns la această perplexă întrebare.

Abel a mai petrecut două luni la Paris, cu resursele tot mai secătuite, dispoziția din ce în ce mai sumbră și sănătatea zdruncinată. Nu a mai făcut decât două noi cunoștințe notabile. Una dintre ele era matematicianul Johann Dirichlet (1805–1859), care, deși mai tânăr decât Abel, își făcuse deja un nume demonstrând (împreună cu Legendre) Marea Teoremă a lui Fermat pentru cazul $n = 5$. (Cu alte cuvinte, demonstrase că nu există

numere întregi x, y, z așa încât $x^5 + y^5 = z^5$.) A doua a fost Jacques Frédéric Saigey, editor al revistei de astronomie și matematică *Bulletin de Ferrussac*, pentru care Abel scrise mai multe articole, în esență rezumându-și lucrările din *Revista Crelle*.

Abel începuse să sufere de ceea ce credea că este o simplă răceală, și trebuie să fi consultat mai mulți medici. Doi ani mai târziu, aflat pe patul de moarte, va fi auzit exclamând: „Puteți vedea că nu era adevărat ceea ce mi-au spus la Paris – sigur n-am oftică." De aici putem deduce că diagnosticul medicilor francezi fusese alarmant – tuberculoză. Refuzând să recunoască la acea vreme cât de gravă îi era starea de sănătate, cu speranțele spulberate și fondurile pe sfârșite, Abel s-a hotărât să părăsească Parisul, plecând pe 26 decembrie spre Berlin.

La scurt timp după sosirea sa la Berlin, a căzut la pat. Acestea erau probabil primele semne de deteriorare rapidă a sănătății sale. Crelle a făcut tot ce-a putut pentru a-l ajuta financiar pe Abel, care a primit, de asemenea, un împrumut de la Holmboe. Printr-un miracol, nici necazurile economice, nici sănătatea care i se înrăutățea văzând cu ochii nu l-au împiedicat să-și finalizeze cea mai amplă publicație de până atunci – „Cercetare asupra funcțiilor eliptice" ocupă 125 de pagini din volumul de opere complete. Lucrarea prezenta o imensă generalizare a funcțiilor trigonometrice obișnuite (de ex., sinusul, cosinusul), având importante ramificații chiar și înspre teoria numerelor. Crelle a încercat să-l convingă pe Abel să rămână la Berlin până când i-ar fi putut obține un post acolo. Abel era însă obosit și chinuit de dorul de țară. Pe 20 mai 1827, greu îndatorat și fără nici o perspectivă de a-și găsi un post, s-a întors la Christiania.

Întoarcerea acasă

Situația găsită în 1827 la Christiania a confirmat cele mai rele temeri ale lui Abel. Amintesc că bursa pe care o primise nu avea nici o prevedere privind vreo sponsorizare a lui în Norvegia. După ce Departamentul Finanțelor i-a respins cererea de prelungire a bursei, universitatea a reușit să-i asigure un mic

stipendiu din care să trăiască (nu înainte ca Departamentul Finanțelor să-și rezerve dreptul de a deduce această sumă din câștigurile viitoare ale lui Abel.) Chiar și cu acest sprijin, pentru a putea face față, Abel a fost silit să dea meditații unor elevi de școală. Crelly, logodnica lui, a ocupat un nou post de guvernantă la o oarecare familie Smith, care era proprietara unor întreprinderi metalurgice din Froland, în sudul Norvegiei.

Începutul lui 1828 a adus cu el îmbunătățiri financiare importante. Profesorul Hansteen reușise să obțină un grant mare pentru studierea câmpului magnetic terestru, dându-i astfel posibilitatea lui Abel să devină înlocuitorul lui temporar atât la universitate, cât și la academia militară. Totodată, Abel s-a trezit cuprins de o frenetică dorință de a publica – cum nu mai cunoscuse nicicând înainte. Luna septembrie 1828 a fost martora apariției nu a una, ci a două lucrări asupra funcțiilor eliptice. Cea dintâi reprezenta prima parte din masivul „Cercetare asupra funcțiilor eliptice", iar cealaltă anunța rezultate obținute în acest domeniu de tânărul matematician german Jacob Jacobi. Apoi, pentru a nu fi întrecut, Abel s-a repezit să publice și a doua parte a manuscrisului, căruia i-a adăugat o notă, menită să arate cum rezultatul lui Jacobi putea fi obținut din al lui. Mai important din perspectiva acestei cărți, el a încetat să mai lucreze la ceea ce ar fi trebuit să fie răspunsul său definitiv la întrebarea care ecuații pot fi rezolvate prin intermediul formulelor. Aceasta lăsa ușa deschisă unui alt tânăr genial – Évariste Galois – pentru a da răspunsul și a introduce cu acest prilej teoria grupurilor.

Recunoașterea geniului lui Abel începuse să se răspândească acum prin toată Europa. Legendre, care începuse să corespondeze atât cu el, cât și cu Jacobi pe tema teoriei funcțiilor eliptice, a declarat că „prin aceste lucrări, voi doi [Abel și Jacobi] veți fi așezați printre analiștii cei mai de frunte ai vremii noastre". Pe lângă faima matematică, și realitatea situației economice precare a lui Abel începuse să ajungă la urechile anumitor matemeticieni europeni, mai ales datorită eforturilor neobositului Crelle. Într-o acțiune de sprijin fără precedent, patru eminenți membri ai Academiei Franceze de Științe i-au scris regelui

Carol al XIV-lea al Norvegiei și Suediei, cerându-i să facă în așa fel încât să fie înființat un post potrivit cu talentele lui Abel. Demersul nu a avut nici un rezultat.

Abel și-a petrecut vara lui 1828 în Froland, împreună cu Crelly și familia Smith. Acesta era un loc unde, cu cuvintele lui, se simțea „printre toți îngerii". Hanna Smith, una dintre fete, pe atunci în vârstă de 20 ani, l-a caracterizat mai târziu, în amintirile ei, ca fiind în general vioi și jucăuș. Ea face o emoționantă descriere a felului în care obișnuia Abel să stea cu hârtiile sale, înconjurat de doamnele casei, transcriindu-și manuscrisele pe hârtia poștală cea mai subțire, pentru a economisi costul expedierii.

Termenii dezastruoși impuși de stipendiul alocat cu doi ani înainte lui Abel reveniseră pentru a-l hăitui. Ministrul Finanțelor insista ca „avansul sus-menționat să fie dedus în rate adecvate din salariul domnului Abel". Deși universitatea a refuzat să urmeze aceste instrucțiuni nemiloase, fondurile lui Abel se topeau ca un bulgăre de zăpadă. El și-a încheiat unul dintre biletele adresate doamnei Hansteen în vara aceea cu „A dvs. cea mai lovită de sărăcie creatură", iar un altul, cu „Sunt la fel de sărac ca un șoarece de biserică… Al dvs. distrus".

În toamna lui 1828, el a revenit la Christiania, pregătindu-se pentru începerea noului an școlar. Dar în septembrie, timp de câteva săptămâni a fost atât de bolnav, încât a trebuit să rămână la pat. Cu toate acestea, la mijlocul lui decembrie, în timpul unei ierni deosebit de friguroase, a nesocotit sfatul surorii sale și a plecat din nou spre Froland, pentru a petrece Crăciunul cu logodnica lui. S-a îmbolnăvit la puțin timp după Crăciun, începând să tușească până la epuizare. În ciuda stării sale de slăbiciune, a reușit să producă un foarte scurt rezumat al lucrării concepute la Paris (care se temea că s-ar fi pierdut definitiv), pe care l-a trimis *Revistei Crelle.* Pe 9 ianuarie, când s-a văzut clar că începuse să scuipe sânge, a fost chemat în ajutor medicul de district. Acesta a ezitat să pronunțe temutul cuvânt „tuberculoză", care era efectiv o condamnare la moarte, dându-i diagnosticul de pneumonie. Următoarele câteva luni s-au transformat într-un oribil coșmar pentru toți cei implicați. Crelly și cele

două fete mai mari ale familiei Smith făceau cu rândul de gardă la patul lui. În timpul chinuitoarelor nopți de nesomn, Abel a fost auzit blestemând întreaga tagmă medicală, pentru a nu fi făcut suficiente progrese ca să-l poată ajuta. Zilele nu erau nici ele mult mai bune. Abel avea să șoptească de mai multe ori că matematicianul Jacob Jacobi era persoana care putea pricepe cel mai bine valoarea operei lui. Uneori, el aluneca spre autocompătimire și se plângea amar de sărăcia care-i fusese cel mai constant camarad. Pe măsură ce iarna se scurgea, vorbea zilnic tot mai răgușit, până la punctul în care cuvintele îi deveneau abia inteligibile pentru cei din jur. În prag de aprilie, condiția lui s-a deteriorat vizibil. După o noapte de chinuri, tânărul geniu norvegian și-a dat sufletul, pe 6 aprilie la orele 4 ale după-amiezii, cu Crelly și una dintre surorile Smith la căpătâiul său. Avea 26 de ani. Distrusă, Crelly îi scria doamnei Hansteen pe 11 aprilie: „Abel al meu e mort! Am pierdut totul pe Pământ. Nimic, nimic nu mi-a rămas."

Pe 8 aprilie, neștiind încă de moartea lui Abel, Crelle i-a scris plin de jubilație și entuziasm de la Berlin: „Acum, dragul și prețiosul meu prieten, îți pot aduce vești bune. Ministerul Educației a hotărât să te cheme la Berlin, ca să te angajezi aici."

Abel a fost înmormântat în Froland, pe 13 aprilie 1829, la o zi după o puternică furtună. Prietenii săi i-au plătit piatra de mormânt. În necrolog, Crelle a scris:

> Toată opera lui Abel e modelată de o excepțională strălucire și forță de gândire… Dificultățile par să dispară în fața atacului victorios al geniului său. Dar nu numai marele său talent e cel care face dispariția lui extrem de regretabilă. El s-a distins, în egală măsură, prin puritatea și noblețea caracterului și printr-o excepțională modestie, pentru care persoana i-a fost la fel de îndrăgită ca și geniul.

Pe 28 iunie 1830, Academia Franceză de Științe a anunțat că Marele Premiu pentru Matematică avea să le fie conferit în comun lui Abel și Jacobi.

Care a fost însă destinul memoriului parizian al lui Abel? În urma schimbului de scrisori dintre Jacobi și Legendre și a

intervenției consulului norvegian la Paris, Cauchy a reușit să dezgroape în cele din urmă manuscrisul, în 1830. Dar vor trebui să mai treacă 11 ani pentru ca el să ajungă la tipar. În sfârșit, ca o concluzie aproape comică la această *saga* a neglijenței, manuscrisul a dispărut din nou în timpul procesului de tipărire, pentru a reapărea abia în 1952, la Florența.

În 2002, guvernul norvegian a instituit un fond de 22 de milioane de dolari pentru conferirea Premiului Abel pentru matematică[5]. Acesta este prezentat în stilul Premiului Nobel, de către regele Norvegiei. Primul premiu, în valoare de 816 000 de dolari, a fost acordat pe 3 iunie 2003 faimosului matematician francez Jean-Pierre Serre; al doilea a revenit, pe 25 mai 2004, altor doi – Sir Michael Francis Atiyah de la Universitatea din Edinburgh și Isadore M. Singer de la Massachusetts Institute of Technology. Premiul a adus, în sfârșit, în atenția publică numele matematicianului care a demonstrat că o anumită ecuație nu poate fi rezolvată printr-o formulă. În mod ironic, opera strălucită a celui mai sărac matematician este celebrată printr-o recompensă financiară uriașă.

A existat o întâlnire care n-a avut niciodată loc la Paris în acea toamnă tristă a anului 1826. Necunoscut lui Abel, un tânăr matematician francez care trăia la distanță de numai câțiva kilometri, începea să fie obsedat de exact aceeași problemă care-l preocupase atâta pe norvegian. Putea fi cvintica rezolvată printr-o formulă? Sau, mai general, care ecuații puteau fi rezolvate printr-o formulă? Évariste Galois nu avea decât cincisprezece ani în perioada ședерii lui Abel la Paris, dar începuse deja să devoreze cărți de matematică, de parcă ar fi fost romane de aventuri. Din păcate, nu vom ști niciodată cum s-ar fi schimbat viața acestor doi oameni cu stea în frunte în urma unei întâlniri dintre ei. Un singur lucru e cert: Dacă se poate concepe o poveste și mai tragică decât a lui Abel, aceasta este cea a lui Galois.

5
Matematicianul romantic

În dimineața zilei de 30 mai 1832, un singur glonț tras de la o distanță de 25 de pași l-a nimerit pe Évariste Galois în stomac. Deși rănit mortal, el nu și-a dat sufletul. A rămas căzut la pământ până ce un bun samaritean anonim, poate un fost ofițer, l-a luat și l-a dus la Spitalul Cochin din Paris. A doua zi, avându-l alături pe fratele său mai mic Alfred, Galois a murit de peritonită. Ultimele lui cuvinte cunoscute au fost: „Nu plânge; trebuie să-mi fac curaj ca să mor la 20 de ani."

Acesta a fost tristul sfârșit al celui mai vizionar dintre toți matematicienii – neverosimilă combinație dintre un geniu, precum Mozart, și un romantic, precum lord Byron, totul inserat într-o poveste care rivalizează în jalea ei cu cea a lui Romeo și Julieta.

Galois – primii ani

Évariste Galois s-a născut[1] în noaptea de 25 octombrie 1811 și a fost botezat după sfântul celebrat pe 26 octombrie (figura 52 îi prezintă certificatul de naștere, iar Anexa 8 îi dă arborele genealogic extins). Tatăl său, Nicolas-Gabriel Galois (figura 53), era un om educat, care conducea pe vremea aceea o școală destul de vestită de băieți din Bourg-la-Reine (astăzi o suburbie a Parisului) – post pe care-l moștenise de la bunicul lui Évariste. În timpul liber, Nicolas-Gabriel compunea versuri sarcastice și amuzante piese de teatru, care îl făceau un oaspete bine-venit la seratele vremii. Mama lui Évariste, Adélaïde Marie Demante, fiica unui jurisconsult de la Facultatea de Drept din

Figura 52

Paris, era ea însăși versată în studiile clasice. Familia Demante trăia aproape peste drum de numărul 54 de pe Grande Rue – casa familiei Galois (figura 54 arată această casă, pe vremea când ea încă mai exista).

La mijlocul erei napoleoniene, Nicolas-Gabriel era un supus leal al împăratului. Fratele său mersese chiar până la a deveni ofițer al Gărzii Imperiale. Timpurile postrevoluționare au fost însă extraordinar de tulburi, iar după colosala înfrângere din Rusia, Napoleon fusese silit să abdice în 1814, în favoarea regelui Ludovic al XVIII-lea din dinastia de Bourbon. Practicile megalomane ale acestui rege, care erau însoțite de o restaurare treptată a puterii bisericii, au fost suficiente pentru a reaprinde

mișcarea liberală, al cărei partizan zgomotos era Nicolas-Gabriel. Călare pe valul nemulțumirii publice, Napoleon a avut ocazia de a reveni la putere în martie 1815, doar pentru a cădea din nou o sută de zile mai târziu, de data aceasta definitiv. Cu toate astea, în timpul scurtei sale reveniri la putere, Nicolas-Gabriel a fost numit primar în Bourg-la-Reine, un post pe care continuă să-l dețină chiar și după înfrângerea lui Napoleon la Waterloo (figura 55 prezintă un echivalent al unui actual document de împuternicire). Schimbările frecvente de conducere și natura cameleonică a climatului politic contribuiau la polarizarea societății franceze în două tabere destul de distincte. La stânga, se situau liberalii și republicanii, animați în special de idealurile antrenante ale Revoluției Franceze. La dreapta, erau „legitimiștii" sau așa-numiții *ultras* (prescurtare de la ultraregaliști), al căror model statal era o monarhie dominată de biserică.

Figura 53

Ca și Abel, Évariste a fost educat întâi acasă. Adélaïde Marie le-a oferit copiilor săi o solidă pregătire în direcția studiilor clasice și religioase, transmițându-le totodată idei liberale. Chiar și după a zecea aniversare a băiatului, mama lui Évariste și-a regretat intenția inițială de a-l trimite la o școală din Reims și s-a hotărât să-l mai țină încă doi ani acasă.

În octombrie 1823, Évariste și-a părăsit, în sfârșit, casa părintească, pentru a se duce la Liceul-internat Louis-le-Grand[2] din Paris. Această prestigioasă instituție existase încă din secolul al XVI-lea și număra printre absolvenții ei oameni iluștri, precum revoluționarul Robespierre și romancierul Victor Hugo. Înainte de înscrierea lui Galois, liceul se

Figura 54

Figura 55

distinsese prin aceea că rămăsese deschis în vremurile tumultuoase ale Revoluției Franceze. În ciuda preeminenței sale academice, el era găzduit într-o clădire cu aspect de închisoare, având o disperată nevoie de restaurare. Elevii ofereau o excelentă reprezentare a întregului spectru politic al societății franceze a timpului, fapt care furniza o rețetă sigură pentru tulburări. Revoltele, certurile dintre ei și dezordinile reprezentau normalitatea la Louis-le-Grand. Nesupunerea era alimentată și de disciplina mai mult decât militară impusă elevilor. Spartanul program zilnic începea la 5,30 dimineața și se încheia la ora 20,30 fix, era meticulos structurat și nu îngăduia decât foarte puțin timp liber. Tăcerea era impusă chiar și la masă, iar meniul era extrem de sărăcăcios. Micul dejun, bunăoară, consta din pâine goală și apă.

În sălile de clasă, elevii stăteau câte doi pe treptele goale, la lumina lumânării, câte una pentru fiecare pereche. Imaginea șobolanilor traversând sala de clasă în timpul lecțiilor era atât de comună, încât nu mai atrăgea atenția. Cea mai ușoară deviere de la rutina obligatorie – chiar și simplul refuz al unui fel de mâncare – ducea la recluziune solitară, într-una din cele 12 celule speciale. Una peste alta, trecerea de la atmosfera fericită și pașnică de acasă la mediul violent și restrictiv al liceului trebuie să fi fost destul de șocantă pentru Galois.

Évariste a ajuns la Louis-le-Grand la scurtă vreme după numirea conservatorului Nicolas Berthot pe post de director. Elevii bănuiau că numirea sa era primul pas al unei încercări de a împinge liceul înapoi, spre rădăcinile sale iezuite. Ei și-au exprimat nemulțumirea refuzând să cânte la slujbele din capelă și ignorând toasturile uzuale pentru Ludovic al XVIII-lea și alți demnitari, la un banchet al liceului, dat pe 28 ianuarie 1824.

Reacția a fost rapidă și dură – 117 elevi au fost dați afară imediat. Galois, care era chiar la începutul stagiului său, nu a fost implicat, dar neîndoios, întâmplarea l-a afectat enorm.

În ciuda condițiilor umilitoare și a disciplinei inuman de stricte, primii doi ani ai lui Évariste la Louis-le-Grand au fost caracterizați de un considerabil succes. Pregătirea deosebită primită de la mama sa în domeniul studiilor clasice s-a oglindit curând în distincții pentru narațiune latină și traducere din greacă. La examenul-concurs de cultură generală, a primit și premiul pentru matematică. Cu toate acestea, mediul nefavorabil își lua uiumul. Iarna umedă 1825–26 i-a adus o puternică durere de urechi, care a persistat luni de zile, necontribuind la îmbunătățirea dispoziției în general depresive a lui Galois. Despărțirea de tatăl său, împreună cu care se obișnuise să guste schimburi de cuplete pline de duh, era deosebit de dură pentru el. Ca urmare, rezultatele lui școlare au început să fie mai proaste.

În afara zidurilor școlii, evenimentele se desfășurau cu rapiditate. Ludovic al XVIII-lea a murit în septembrie 1824 și a fost urmat de fratele său, care și-a luat numele de Carol al X-lea. Tranziția a fost marcată de o dramatică creștere a influenței clerului și a extremei drepte. Cei dovediți că ar fi comis acele dubios definite „crime împotriva religiei“ erau acum pasibili de pedeapsa cu moartea.

Nașterea unui matematician

Toamna lui 1826 a fost martora primului eșec umilitor al lui Galois. Era la clasa de retorică. Deși eforturile lui sârguincioase, dar lipsite de entuziasm fuseseră în general bine apreciate de profesorul său, noul director ultraconservator Pierre-Laurent Laborie avea idei oarecum diferite. În rigida lui opinie, Galois era prea tânăr pentru acea clasă avansată, care cerea „o judecată ce nu vine decât odată cu maturitatea“. În ianuarie, Galois a fost așadar silit, spre consternarea sa și a tatălui său, să repete a treia clasă de liceu. Expresii ca „original și bizar“ sau „bun, dar ciudat“ au început să apară în rapoartele

Figura 56

care-i descriau caracterul. Experiența neplăcută cu retorica s-a dovedit însă a fi o binecuvântare deghizată – Galois a descoperit matematica. Figura 56 arată un portret al lui Galois cam din acea vreme, desenat de un coleg de clasă.

Noul profesor de matematici preparatoare, Monsieur Hippolyte Vernier, a hotărât să introducă o nouă carte pentru studiul geometriei. Aceasta era *Elemente de geometrie*, a lui Legendre, care apăruse pentru prima dată în 1794 și devenise rapid folosită în întreaga Europă. Textul acesta, devenit astăzi clasic, rupea oarecum plicticoasa tradiție euclidiană a geometriei de liceu. Legenda spune că, în lăcomia sa de matematică, Galois a „înghițit" întreaga carte a lui Legendre în numai două zile, cu toate că aceasta trebuia să acopere întregul curs, de doi ani. Deși exactitatea acestei (probabil exagerate) relatări este imposibil de verificat, e cert că, prin toamna lui 1827, Galois își pierduse complet interesul pentru orice altceva, devenind pasionat de matematică. Profesorul lui de retorică a început prin a-i înțelege greșit nepăsarea, descriindu-i performanțele neinspirate prin cuvintele: „În tot ceea ce face, nu există decât stranii fantezii și neglijență." Dar, după al doilea trimestru, tot el a concluzionat în mod corect că: „Se află sub fascinația matematicii. Cred că i-ar face bine ca părinții să nu-i permită să studieze altceva." Cel de-al treilea trimestru n-a făcut decât să confirme acest verdict: „Dominat de pasiunea lui pentru matematică, a neglijat complet orice altceva."

Galois era, într-adevăr, vrăjit. A dat deoparte manualele obișnuite și s-a dus direct la lucrările originale. Galopând de la un articol profesional de matematică la altul, așa cum un băiețaș obișnuit ar face-o azi cu volumele povestirilor lui Harry Potter, s-a cufundat cu totul în memoriile lui Lagrange, *Rezolvarea*

ecuațiilor algebrice și *Teoria funcțiilor analitice.* Această experiență formativă l-a condus spre o ambițioasă tentativă. Fără să fie deloc la curent cu lucrările lui Ruffini și Abel, a încercat timp de două luni să rezolve cvintica. Dar exact ca și tânărul norvegian, și el a crezut la început că găsise formula, doar pentru a fi dezamăgit mai târziu, când a găsit o eroare în soluția sa. Figura 57 prezintă o notă editorială ulterioară, referitoare la faptul că eroarea lui Abel (de a fi crezut că rezolvase cvintica) fusese repetată de Galois și că „aceasta nu e singura analogie frapantă[3] dintre geometrul norvegian muritor de foame și geometrul francez condamnat să trăiască sau să moară… în spatele zăvorului unei temnițe". Ca și în cazul lui Abel, acest eșec minor n-a făcut decât să-l impulsioneze pe Galois spre chestiuni mai importante legate de rezolvabilitatea cvinticei.

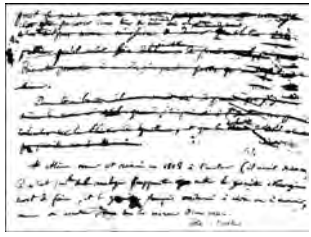


Figura 57

Dar piedici mai serioase aveau să i se ivească în cale, unele datorate lui Galois însuși. Așa cum Monsieur Vernier diagnosticase pe bună dreptate, în ciuda geniului și imaginației sale creatoare, Galois n-a fost niciodată capabil să studieze metodic și să lucreze sistematic. Extrem de avansat în anumite subiecte, era lipsit de cele mai fundamentale baze în altele. Ignorându-și lipsurile și făcând pe surdul la sfatul lui Vernier, el a încercat plin de curaj, în iunie 1828, să ia cu un an mai devreme examenul de admitere la legendara École Polytechnique. Aceasta fusese fondată în 1794, drept principală instituție de pregătire a inginerilor și oamenilor de știință. Lagrange, Legendre, Laplace și alți savanți faimoși făcuseră parte, la un moment sau altul, din corpul ei profesoral. Școala era faimoasă și pentru atmosfera ei liberală. Dacă Galois ar fi trecut examenul, Politehnica ar fi fost solul perfect pentru a-i hrăni spiritul gata să-și ia zborul. Așa cum era însă de așteptat, datorită pregătirii sale inadecvate, Galois a ratat examenul. Așteptarea înșelată atunci a fost, poate, germenele sentimentului său ulterior de persecuție, care avea să crească până la dimensiuni clar paranoice.

Silit să-și continue studiile la Liceul Louis-le-Grand, Galois s-a înscris în clasa specială de matematică a lui Louis-Paul-Émile Richard (1795–1849). Richard s-a dovedit a fi, pentru Galois[4], ceea ce fusese Holmboe pentru Abel – un profesor și un susținător, furnizor de inspirație și motivație. Richard nu era un matematician strălucit, dar era la curent cu ultimele dezvoltări din domeniu. El a recunoscut de îndată capacitățile neobișnuite ale lui Galois și l-a încurajat să se angajeze în cercetări originale, afirmând plin de entuziasm că „elevul acesta este net superior tuturor colegilor săi". El a mai notat că „elevul acesta nu studiază decât matematica". Exact așa cum mama și sora lui Picasso, pe deplin conștiente de remarcabilele lui talente, au păstrat toate desenele lui din copilărie, și Richard a pus deoparte 12 carnete cu temele de clasă ale lui Galois. Aceste documente au sfârșit prin a ajunge în biblioteca Academiei de Științe. Un alt matematician pe care Galois l-a întâlnit cam în aceeași perioadă a fost Jacques-François Sturm (1803–1855). Sturm avea să fie mai târziu unul dintre puținii care să recunoască imediat că ideile lui Galois erau diamante în stare brută.

În 1829, Galois și-a publicat primul articol matematic. Acest studiu relativ minor avea drept obiect *fracțiile continue*. Lucrarea, cu aplicații în domeniul ecuațiilor pătratice, a apărut în revista *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Ca o paranteză, Abel a murit la cinci zile după publicarea primului articol al lui Galois. Pentru Galois, această primă incursiune în cercetarea matematică s-a transformat curând într-o explozie de noi idei. Tânărul de 17 ani era pe punctul de a revoluționa algebra. Deși Abel arătase fără ambiguitate că ecuația generală de gradul cinci nu poate fi rezolvată cu o formulă ce implică numai operații aritmetice și extrageri de rădăcini, moartea sa prematură a lăsat neclarificată o întrebare mult mai importantă: Cum se determină dacă *orice* ecuație dată (de gradul cinci sau mai mare) este sau nu rezolvabilă cu o formulă? Reamintiți-vă că multe ecuații particulare erau, totuși, rezolvabile. În principiu, demonstrația lui Abel lăsa deschisă posibilitatea să existe ecuații particulare ale căror soluții să fie exprimabile cu ajutorul unei formule.

Pentru a răspunde la întrebarea rezolvabilității, Galois nu trebuia numai să introducă conceptul fundamental de grup, dar și să formuleze o întreagă nouă ramură a algebrei, cunoscută astăzi drept *teoria lui Galois*. Drept punct de plecare, el și-a ales teoria ecuațiilor, pornind de acolo de unde o lăsase Lagrange. S-a concentrat asupra relațiilor dintre prezumtivele soluții ale unei ecuații (cum ar fi relația $x_1x_4 = 1$ a două dintre cele patru soluții x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuației de grad patru: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$) și permutările acestor soluții care lasă relațiile neschimbate[5] (vezi notele pentru un exemplu). Aici este însă punctul unde geniul său a luat cu adevărat problema pe cont propriu. Galois a izbutit să asocieze fiecărei ecuații un fel de „cod genetic" al acelei ecuații – *grupul Galois* al ecuației – și să demonstreze că proprietățile grupului Galois sunt cele care spun dacă ecuația este rezolvabilă printr-o formulă sau nu. Simetria a devenit conceptul-cheie, iar grupul Galois era o măsură directă a proprietăților de simetrie ale ecuației. Voi descrie în capitolul 6 esența strălucitei demonstrații a lui Galois. Richard a fost atât de impresionat de ideile lui, încât a afirmat că tânărul geniu ar trebui admis fără examen la École Polytechnique. Pentru a-i da lui Galois o șansă de a-și realiza ambițiosul scop, el l-a încurajat să-și expună teoria în forma a două memorii, pe care s-a oferit să le ducă personal marelui Cauchy, pentru a fi prezentate la Academia de Științe. Memoriile au fost, într-adevăr, înaintate pe 25 mai și pe 1 iunie 1829, au fost prezentate pe scurt de Cauchy și încredințate pentru judecare lui Cauchy, Joseph Fourier (secretarul academiei) și specialiștilor în fizică matematică Claude Navier și Denis Poisson.

La mai mult de șase luni după înaintarea memoriilor, pe 18 ianuarie 1830, Cauchy trimitea academiei următoarea scrisoare de scuze[6]:

> Trebuia să prezint astăzi la Academie mai întâi un raport asupra lucrării tânărului Galois, apoi un memoriu asupra determinării analitice a rădăcinilor primitive, în care să arăt cum se poate reduce aceasta la rezolvarea unor ecuații numerice având doar rădăcini întregi și pozitive. O indispoziție mă reține în casă. Regret că nu pot participa la sesiunea de astăzi și vă rog să mă reprogramați în ședința următoare pentru subiectele indicate.

Totuși, la ședința următoare, care a avut loc pe 25 ianuarie, se pare că tendințele egotiste ale lui Cauchy s-au impus din nou, căci el a sfârșit prin a prezenta numai propriul memoriu, fără a mai menționa lucrarea lui Galois. Dar acesta nu era capătul ghinioanelor avute cu aceste manuscrise. În iunie 1829, Academia de Științe anunța stabilirea unui nou Mare Premiu pentru Matematică. Obosit să tot aștepte verdictul lui Cauchy și aflând din *Buletinul lui Ferrusac* de lucrarea lui Abel despre teoria ecuațiilor, Galois s-a decis să retrimită lucrarea, cu ceva modificări, pentru acest concurs. (Nu găsesc nici o dovadă directă care să vină în sprijinul speculației că cel care l-ar fi încurajat să-și încerce norocul cu premiul era Cauchy, chiar dacă ceva dovezi indirecte, descrise mai târziu, par să indice că acesta fusese impresionat de lucrare.) Lucrarea trimisă la concurs de Galois („Asupra condițiilor ca o ecuație să fie rezolvabilă prin radicali" – cele patru operații aritmetice și extragerea de rădăcini) a fost de atunci socotită drept una dintre cele mai inspirate capodopere din istoria matematicii. Ea a fost depusă în februarie 1830, puțin înainte de data limită, de 1 martie. Comitetul de premiere era format din matematicienii Legendre, Poisson, Lacroix și Poinsot. Pentru motive care nu sunt în întregime clare, secretarul academiei, Fourier, a luat manuscrisul acasă. El a murit pe 16 mai, iar manuscrisul nu a fost niciodată recuperat dintre hârtiile sale. Drept urmare, fără ca Galois să fi știut absolut nimic, lucrarea prezentată de el n-a fost niciodată luată în considerare pentru decernarea premiului. În cele din urmă, premiul i-a fost acordat lui Abel (postum, și îndreptățit, având în vedere celelalte lucrări participante la concurs) și lui Jacobi. Vă puteți imagina furia lui Galois când a aflat în cele din urmă că manuscrisul său fusese pierdut. Paranoidul tânăr era acum convins că toate forțele mediocrității se uniseră pentru a-i refuza o binemeritată reputație.

Dezastrul lovește de două ori

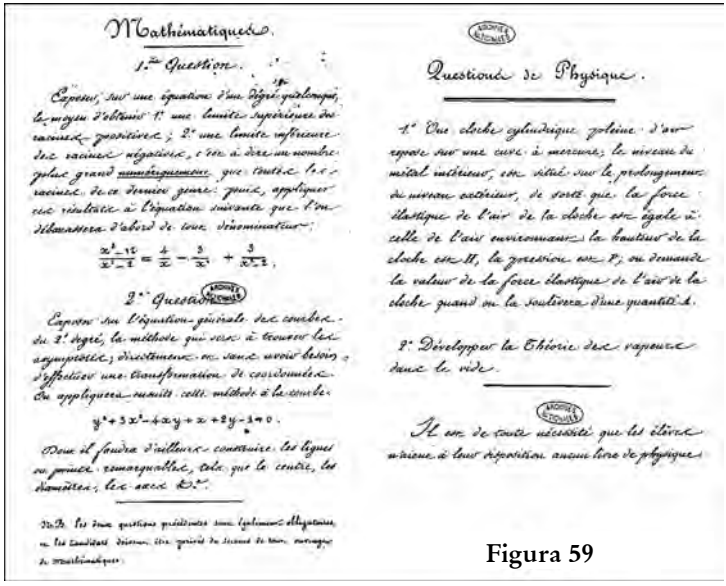
Dacă iunie 1827 fusese o lună relativ fericită pentru Galois, importantul său manuscris fiind supus atenției academiei, iulie a fost una dintre cele mai rele. Încoronarea lui Carol al X-lea

în 1824 dusese la o creștere semnificativă a puterii bisericii și a ultraregaliștilor. În Bourg-la-Reine, un nou preot și-a reunit forțele cu alți administratori de dreapta, într-o încercare de a-l îndepărta pe liberalul Nicolas-Gabriel Galois din poziția de primar. Acest tânăr preot a falsificat semnătura primarului, punând-o pe câteva cuplete stupide și epigrame abjecte. Vădit incapabil să țină piept urâtului scandal ce izbucnise, delicatul Nicolas-Gabriel s-a sinucis prin asfixiere cu gaz. Această tragedie s-a petrecut pe doi iulie, în apartamentul din Paris al lui Nicolas-Gabriel, de pe strada Saint Jean-de-Beauvais, la numai o aruncătură de băț de școala lui Évariste. Răvășitul tânăr mai avea de îndurat și o altă tortură emoțională – în timpul funeraliilor, a izbucnit o revoltă ca protest împotriva încercării răutăciosului preot de a participa la slujbă. Figura 58 arată placa comemorativă pentru primarul Nicolas-Gabriel Galois, care se află și în ziua de astăzi pe zidul primăriei.

Figura 58

Cu greu se poate imagina o perioadă mai nefavorabilă pentru ca Évariste să dea pentru a doua oară examenul de admitere la École Polytechnique. Mai mult, soarta a făcut ca examinarea să aibă loc la exact o lună[7] după înmormântare, pe 3 august, într-o zi de luni, când Galois era încă în doliu. În istoria matematicii, această infamă examinare a devenit aproape echivalentă cu interogarea lui Galileo de către Inchiziție. Comparați cu Galois, cei doi examinatori, Charles Louis Dinet și Lefebure de Fourcy, nu erau, în cuvintele istoricului E.T. Bell, „nici măcar vrednici să-i ascută creioanele". Deși Dinet era el însuși un fost student al Politehnicii și dascălul care-l pregătise pentru propriul său examen de admitere pe nimeni altul decât pe marele Cauchy, de acești doi matematicieni nu ne mai amintim astăzi practic decât pentru un singur lucru – că l-au trântit la examen pe unul dintre cele mai mari genii matematice ale tuturor timpurilor. Numele lui Galois nu apare pe lista celor 21 de candidați pe care Dinet i-a considerat admisibili.

Nu știm cu certitudine ce s-a întâmplat la acest examen. Se speculează că înclinația lui Galois de a calcula mintal și de a scrie pe tablă numai rezultatele finale a făcut o impresie proastă la un examen oral, în care el ar fi trebuit să arate toate fazele gândirii sale. Dinet, în special, avea reputația că pune întrebări relativ simple, dar că este extrem de exigent în privința răspunsurilor. Răbdarea lui Galois, care nu a fost niciodată exemplară, trebuie să fi fost solicitată la limită de evenimentele din perioada morții tatălui său. Potrivit cu una dintre versiuni, atunci când i s-a cerut să schițeze teoria logaritmilor aritmetici, Galois l-a informat pe Dinet – arogant, deși corect (vezi notele) – că nu există logaritmi *aritmetici*[8]. Potrivit legendei, frustrat de incapacitatea examinatorilor de a înțelege neortodoxele sale metode, el a azvârlit cârpa de șters tabla într-unul dintre ei; această poveste se potrivește cu caracterul său, dar este probabil neadevărată – cel puțin, conform matematicianului Joseph Bertrand (1822–1900). Clar, eșecul la examen i-a lăsat lui Évariste o adâncă înverșunare și n-a făcut decât să-i sporească simțul persecuției. Două decenii mai târziu, Olry Terquem, editorul revistei *New Annals of Mathematics*, va spune: „Un candidat cu inteligență superioară este pierdut dacă are un examinator cu inteligență inferioară." O notă biografică ce apărea în 1848 în *Magasin pittoresque* conchidea, de asemenea, că: „Pentru că nu poseda așa-zisa « experiență a tablei », pentru că nu exersase să rezolve cu voce tare, în fața unei largi audiențe, acele chestiuni de detaliu… Galois a fost declarat respins." Fiindcă nu se admiteau decât maximum două încercări de intrare, Galois era acum silit să se înscrie la mai puțin prestigioasa École Préparatoire (ulterior numită École Normale). Mai exista, totuși, încă un „mic" obstacol. Pentru a fi admis, Galois trebuia să-și dea bacalaureatul în arte și științe, pentru obținerea diplomei de liceu, apoi să treacă un examen oral. Totala sa indiferență pentru orice nu era legat de matematică făcea să fie dificilă trecerea acestor examene, ca să nu spunem mai mult. Chiar și examinatorul de la fizică, Jean Claude Peclet, scria cu uimire: „Nu știe absolut nimic… Mi s-a spus că e bun la matematică. Asta mă surprinde mult." Cu toate acestea, în primul rând pe



Mathématiques.

1.re Question.

Exposer, sur une équation d'un degré quelconque, le moyen d'obtenir 1.° une limite supérieure des racines positives; 2.° une limite inférieure des racines négatives, c'est à dire un nombre plus grand numériquement que toutes les racines de la dernière espèce; puis, appliquer ces résultats à l'équation suivante que l'on débarrassera d'abord de tous dénominateurs:

$$\frac{x^5-1^2}{x^3-4} = \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^2-2}.$$

2.e Question.

Exposer sur l'équation générale des courbes du 2.d degré, la méthode qui sert à trouver les asymptotes, directement et sans avoir besoin d'effectuer une transformation de coordonnées. On appliquera ensuite cette méthode à la courbe

$$y^3+3x^2-4xy+x+2y-1=0.$$

Nous il faudra d'ailleurs construire les lignes ou points remarquables, tels que le centre, les diamètres, les axes &c.

N.B. Les deux questions précédentes sont également obligatoires, les candidats doivent être guidés par le second de leur ouvrage de mathématiques.

Questions de Physique.

1.° Une cloche cylindrique pleine d'air repose sur une cuve à mercure; le niveau du métal intérieur, est situé sur le prolongement du niveau extérieur, de sorte que la force élastique de l'air de la cloche est égale à celle de l'air environnant. La hauteur de la cloche est H, la pression est P; on demande la valeur de la force élastique de l'air de la cloche quand on la soutiendra d'une quantité d.

2.° Développer la Théorie des vapeurs dans le vide.

Il est de toute nécessité que les élèves n'aient à leur disposition aucun livre de physique.

Figura 59

baza rezultatelor la matematică, Galois era admis, la începutul lui 1830, la secțiunea de științe. Figura 59 arată primele pagini a două dintre lucrările de examen ale lui Galois – matematică (la concursul de cultură generală din 1828) și fizică (la ultimul său concurs de cultură generală, din 1829).

Nu totul era întunecat în viața lui Galois. Anul 1830 a fost martorul apariției în importantul *Buletin al lui Ferrusac* a trei dintre articolele sale – două asupra ecuațiilor și unul asupra teoriei numerelor. Primul articol era precursorul revoluționarei lui teorii a ecuațiilor. Apariția numelui său tipărit în imediata apropiere a numelor matematicienilor de frunte ai timpului trebuie să-i fi dat ceva satisfacție lui Galois. În numărul din iunie în special, două articole semnate de Galois încadrau un articol de Cauchy. În același an, Galois l-a întâlnit pe Auguste Chevalier, care avea să devină cel mai bun prieten al său. Auguste și fratele lui, Michel, l-au familiarizat cu noile idei socialiste, inspirate de filozofia religios-egalitaristă cunoscută drept Saint-Simonism (după contele de Saint-Simon). Conceptele

socio-economice ale acestei ideologii se bazau în primul rând pe completa eliminare a inegalităților sociale. Dată fiind firea pasională a lui Galois, implicarea sa crescândă în activități politice furtunoase nu putea să-i atragă decât necazuri.

Liberté, égalité, fraternité

Încă de la încoronarea sa, în 1824, Carol al X-lea stârnise o puternică opoziție. Oponenții Bourbonilor și ai organelor lor legislative dominate de ultraregaliști făceau parte din două tabere – republicanii și orléaniștii. Primul partid, compus în principal din studenți și muncitori, își exprima opiniile inspirate de revoluție în ziarul *La Tribune*. Cel de-al doilea dorea să-l înlocuiască pe Carol al X-lea cu Louis-Philippe, duce de Orléans, și avea drept principal purtător de cuvânt *Le National*. În alegerile din iulie 1830, opoziția a înregistrat o zdrobitoare victorie, de 274 de locuri față de 143 pentru parlament. Confruntat cu abdicarea, Carol al X-lea a încercat o lovitură de stat, dând pe 26 iulie o infamă serie de ordonanțe[9]. În prima ordonanță, el declara: „Libertatea presei se suspendă… nici un ziar sau pamflet… nu poate apărea în Paris sau în departamente." Celelalte anulau rezultatele alegerilor și stabileau datele de desfășurare ale altora, noi. Aceste ordonanțe au fost însoțite de un avertisment dat de prefectul de poliție, care desemna locurile publice în care era permisă citirea ziarelor interzise. Parizienii, înclinați cum îi știm spre sfidare, nu erau pregătiți să tolereze așa ceva. Pe 27 iulie, un articol semnat de orléanistul Louis-Adolphe Thiers chema poporul la revoltă în termeni lipsiți de echivoc. Mișcările de stradă au început în primele ore ale după-amiezii. Oamenii puteau fi văzuți cărând piese de mobilier în orice colț de stradă. În trei zile, au fost ridicate mai mult de cinci mii de baricade și au izbucnit lupte grele, însoțite de dangătele tuturor clopotelor de biserică din Paris. Studenții de la École Polytechnique făceau istorie în aceste *Trois Glorieuses* (*Trei Zile Glorioase*), căci se angajaseră în luptele din Cartierul Latin și împrejurimile acestuia. Spiritul și exploziva energie a celor *Trois*

Figura 60

Glorieuses au fost magnific surprinse în pictura *Libertatea conducând Poporul*[10] (figura 60) a lui Eugène Delacroix (1798–1863). În mulțime, în spatele Libertății, se poate distinge bereta tipică a unui student la Politehnică.

Pe măsură ce se desfășurau aceste fatidice evenimente, spre insuportabila lor frustrare, Galois și colegii săi de la École Normale erau constrânși să audă sunetele revoluției din spatele ferestrelor și ușilor barate. Directorul școlii, domnul Guigniault, a hotărât să utilizeze toate mijloacele, inclusiv o amenințare că va chema trupele, pentru a-și împiedica elevii să participe la revoltă. În seara zilei de 28, Galois n-a mai putut suporta. Cuprins de disperare, el a încercat de mai multe ori să escaladeze zidul exterior, fără să izbutească. Plin de vânătăi și înfrânt, a fost nevoit să accepte faptul că lipsise de la revoluție.

Când s-a risipit fumul, erau aproape patru mii de morți. Ca un compromis între ultraregaliști și republicani, ducele de Orléans a intrat în Paris pe 30 iulie și a fost încoronat pe 9 august, luându-și titulatura – presupus împăciuitoare – de

Louis-Philippe I, Rege al francezilor. Carol al X-lea a plecat în exil, iar Cauchy, întotdeauna un fidel al Bourbonilor, a părăsit și el Franța, ca tutore al nepotului lui Carol. Guigniault, mereu oportunistul director de la École Normale, s-a grăbit să ofere serviciile elevilor săi noului guvern provizoriu. Disprețul lui Galois pentru ipocritul director nu cunoștea margini, așa că el era hotărât să utilizeze prima ocazie pentru a-i demasca perfida duplicitate.

În vara aceea, familia lui Galois a descoperit cu uimire la Bourg-la-Reine că altădată fragilul și rezervatul Évariste se transformase într-un pătimaș revoluționar, care era gata să se sacrifice pentru idealurile republicane. Toamna, întors la școală, el s-a alăturat aripii militante a partidului republican, cunoscută sub denumirea de Société des Amis du Peuple (Societatea Prietenilor Poporului). În aceeași perioadă, el s-a împrietenit cu alți tineri republicani, care erau sortiți să devină mari lideri politici: biologul François-Vincent Raspail (1794–1878), studentul la drept Louis Auguste Blanqui (1805–1881), care ulterior a petrecut mai mult de 36 de ani în închisoare, și activul republican Napoleon Lebon (1807–după 1856). Societatea avea faima că nu șovăie să utilizeze mijloace agresive și chiar violente pentru a-și atinge scopurile. După arestarea liderului ei, Jean-Louis Hubert, ea s-a transformat într-o asociație secretă clandestină, avându-l ca președinte pe Raspail.

La École Normale, relația încordată dintre director și Galois înainta rapid spre darea cărților pe față. Galois continua să ceară lucruri (cum ar fi o uniformă similară cu cea de la École Polytechnique; instrucție militară pentru elevi) despre care trebuie să fi știut că Guigniault nu era nici măcar pregătit să le ia în considerare. În același timp, teoria declarată a lui Guigniault, că „elevii buni nu trebuie să fie interesați de politică", era clar intolerabilă pentru Galois. În sfârșit, când pe 2 decembrie Guigniault a publicat o scrisoare atacând un dascăl liberal de la Louis-le-Grand, într-una dintre cele două gazete studențești, replica a fost iute și aprigă. *La Gazette des Écoles* (*Gazeta Școlilor*) a publicat următoarea scrisoare, a unui „student de la École Normale":

Scrisoarea pe care Dl. Guigniault a inserat-o ieri în Lycée, cu prilejul unuia dintre articolele din ziarul dumneavoastră, mi s-a părut destul de indecentă. M-am gândit că sunteți interesat de orice încercare făcută pentru a demasca acest om.

Iată care sunt faptele pentru care pot depune mărturie 46 de studenți:

În dimineața de 28 iulie, fiindcă mulți studenți de la École Normale doreau să se alăture insurecției, Dl. Guigniault le-a spus, de două ori, că ar putea chema poliția pentru a readuce ordinea. Poliția pe 28 iulie!

În aceeași zi, Dl. Guigniault ne-a zis, cu obișnuita lui pedanterie: „Mulți oameni de treabă au fost omorâți de ambele părți. Dacă aș fi soldat, n-aș ști ce decizie să iau. Ce s-ar cuveni să sacrific, libertatea sau legitimitatea?"

Acesta este omul, care și-a prins o uriașă rozetă tricoloră la pălărie a doua zi. Aceștia sunt doctrinarii noștri liberali!

Aș mai vrea să vă informez, domnule, că elevii de la École Normale, inspirați de nobile spirite patriotice, s-au prezentat de curând la Dl. Guigniault, pentru a-l informa de intenția lor de a adresa o petiție Ministerului Educației, cerând arme și dorind să ia parte la instrucția militară, pentru a-și putea apăra teritoriul dacă este nevoie.

Iată răspunsul Domnului Guigniault. Este la fel de liberal ca și răspunsul său de pe 28 iulie:

„Cererea ce îmi este adresată ne-ar face să părem ridicoli; este o imitație a ceea ce s-a făcut în instituții de nivel superior: ea a venit de jos. Aș dori să arăt că, atunci când aceeași cerere a ajuns la Ministru trimisă de aceste instituții de educație superioară, numai doi membri ai Comitetului Regal au votat « Pentru », iar ei erau exact aceia din Comitet care nu sunt liberali. Ministrul a acceptat din cauză că se temea de tulburările studenților și de spiritul lor pătimaș, care părea să amenințe să ruineze complet Universitatea și École Polytechnique." Eu cred că, dintr-un punct de vedere, Dl. Guigniault are dreptate să se apere în acest fel împotriva învinuirii de a avea prejudecăți contra noii École Normale. Pentru el, nimic nu-i la fel de frumos ca vechea École Normale, care avea de toate.

Am cerut recent o uniformă, care ne-a fost refuzată; ei nu o purtau la vechea școală. La vechea școală, cursurile durau

trei ani. Cu toate că, la înființarea noii școli, s-a recunoscut că anul al treilea n-are rost, Dl. Guigniault nu renunță la el.

Curând, potrivit regulilor de la vechea École Normale, vom fi învoiți numai o dată pe lună și va trebui să ne întoarcem la 5:00 p.m. Este minunat să aparții sistemului educațional care a produs bărbați precum Cousin [referitor la Victor Cousin, filozof și membru conservator al Comitetului pentru Educație] și Guigniault!

Tot ceea ce face ilustrează o concepție îngustă și un conservatorism adânc înrădăcinat.

Domnule, sper că aceste detalii vă vor interesa și că le veți folosi la modul potrivit, în folosul stimatei dumneavoastră gazete.

Editorii ziarului adăugau că deliberat au scos semnătura din scrisoare.

Galois nici nu a confirmat, nici nu a negat că este autorul acestei scrisori, deși multă lume îl bănuia de acest lucru. Pentru Guigniault, existau însă suficiente probe pentru a-l exmatricula pe Galois, pe care-l considera drept un constant factor de agitație. În scrisoarea sa de explicație adresată ministrului Educației, Guigniault pretindea că avea o „mărturisire completă" de la Galois și că, în general, până la acel moment, „îi tolerase comportamentul neconvențional, lenea și caracterul său foarte dificil".

Elevii de la École Normale nu l-au prea sprijinit pe Galois. Cei de la Arte au trimis chiar și o scrisoare luând partea directorului, de teamă pentru viitoarele lor cariere și, cel mai probabil, îndemnați de Guigniault. Cu toate acestea, dintr-o descriere publicată în *La Gazette*, aflăm că cel puțin un elev a demonstrat ceva curaj:

Tocmai am auzit că directorul de la École Normale i-a cerut fiecăruia [dintre elevii săi] să răspundă în particular la următoarea întrebare: „Ești autorul scrisorii din *La Gazette des Écoles*?" Primii patru au răspuns că nu, iar al cincilea a spus: „Domnule, nu cred că pot să răspund la această întrebare, căci ar ajuta la trădarea unuia dintre colegii mei." Dl. Guigniault a fost extrem de iritat de această demnă, nobilă replică.

Îndârjita polemică prilejuită de exmatricularea lui Galois a continuat vreme de trei săptămâni. Scrisorile de susținere a lui Galois și Guigniault alternau constant în paginile ziarelor. Galois își încheia ultimul apel adresat elevilor pe 30 decembrie, scriind: „Nu cer nimic pentru mine însumi, ci mă pronunț pentru onoarea voastră și conform conștiinței voastre."

Pe 2 ianuarie 1831, *La Gazette des Écoles* publica un articol al lui Galois, intitulat „Cu privire la predarea științelor, la profesori, la lucrări, la examinatori". Era un manifest remarcabil, chemând la o completă reformă în predarea științelor. Multe dintre nemulțumirile lui Galois ar suna relevant și în zilele noastre:

> Până când vor fi obligați bieții tineri să asculte sau să repete cât e ziua de lungă? Când li se va da ceva timp să reflecteze asupra acestei acumulări de cunoștințe, să fie capabili să coordoneze [să găsească fire călăuzitoare în] această nesfârșită multitudine de propoziții, în aceste calcule fără legătură între ele?... Elevii sunt mai puțin interesați să învețe decât să-și treacă examenele.

Făcând, probabil, aluzie la propriile sale experiențe dureroase cu examinatorii, Galois se lamenta:

> De ce nu pun examinatorii întrebări candidaților altfel decât într-o asemenea manieră, încâlcită? Se pare că ei se tem de a fi înțeleși de aceia pe care-i interoghează; care este originea acestui deplorabil obicei, de a complica întrebările cu dificultăți artificiale?

Din nefericire, în pofida obiecțiilor sale legitime cu privire la sistemul școlar de pe timpul său, atunci când împrejurările îl vor forța pe Galois să deschidă propria sa „școală", nu va fi nici aceasta un mare succes.

O viață turbulentă

Dat afară din școală și liber să dea curs viselor sale liberale, Galois s-a înrolat în artileria gărzii naționale. Deși această organizație se mândrea cu o uniformă proprie, era mai mult

o miliție. Galois va continua să poarte această uniformă chiar și după ce artileria va fi desființată, iar garda națională, reorganizată, așa încât să cuprindă numai populația plătitoare de impozite, din care el nu făcea parte. Trebuie să plătești, totuși, un preț atunci când nu ești elev – Galois nu avea acum nici un mijloc de subzistență. Ca să-și ducă zilele, s-a hotărât să dea lecții de matematică, iar un prieten librar i-a îngăduit să utilizeze o cameră din librăria sa, de pe Rue de la Sorbonne numărul 5. Pentru acest scop, Galois a dat un anunț în *La Gazette des Écoles*, în care făcea cunoscut că va ține un curs de algebră pentru acei elevi „care simt cât de incomplet este studiul algebrei în colegii și doresc să aprofundeze mai adânc în această știință". Dar rețeta nu era bună pentru a face bani. Câteva zeci dintre prietenii lui republicani au venit la început din politețe, dar n-au întârziat să se retragă de la acest curs extrem de avansat. Activitățile sale politice nu erau, de asemenea, de nici un folos, căci îi ocupau din ce în ce mai mult timp. Ambițiile didactice ale lui Galois se reduceau, de aceea, la simple meditații, de nivel redus.

Pe frontul cercetării, un promițător eveniment s-a petrecut la începutul lui 1831, numai pentru a se transforma ulterior într-o altă dezamăgire. Lui Galois i s-a cerut să-și înainteze din nou memoriul la academie. Noua versiune a lucrării intitulate „Condiții pentru rezolvabilitatea ecuațiilor prin radicali" a fost prezentată pe 17 ianuarie, iar de data aceasta, însărcinați cu recenzarea ei erau matematicienii Denis Poisson (1781–1840) și Sylvestre Lacroix (1765–1843). Au trecut mai mult de două luni, totuși, fără nici un cuvânt de la academie. Frustrat, Galois și-a dat pe față dezgustul, trimițând o scrisoare președintelui pe 31 martie 1831, în care se interesa de soarta lucrării, adăugând sarcastic: „Domnule, v-aș fi recunoscător dacă mi-ați putea înlătura motivele de preocupare, invitându-i pe domnii Lacroix și Poisson să anunțe dacă au pierdut și ei memoriul meu [așa cum a făcut Fourier] sau dacă intenționează să facă un raport asupra acestuia la academie." Nici această provocatoare scrisoare n-a avut drept efect primirea vreunui răspuns.

Între timp, evenimentele politice începeau să aibă un mare impact asupra vieții lui Galois. Faimoasa matematiciană Sophie Germain[11] (1776–1831), prima femeie care a făcut o breșă în bariera sexului, izbutind să intre în clubul băieților bătrâni, caracteriza atitudinea sa generală din acea vreme ca fiind dominată de „obiceiul de a insulta". Ea adăuga un trist comentariu[12]: „Se zice că se va scrânti complet și mă tem că este adevărat." În aprilie, 19 artileriști din garda națională, care refuzaseră să depună armele atunci când unitatea lor fusese desființată, au fost aduși la tribunal. Unul dintre ei era Pescheux d'Herbinville, la care vom reveni când vom vorbi de moartea lui Galois. Spre deliciul republicanilor, toți au fost achitați pe 16 aprilie, într-un proces mult mediatizat, cunoscut drept „Procesul celor nouăsprezece". Societatea Prietenilor Poporului a organizat un mare banchet la restaurantul „Aux Vendanges de Bourgogne", pentru a sărbători evenimentul. Două sute de activiști republicani luau parte la el pe 9 mai, între care faimosul scriitor Alexandre Dumas (1802–1870), biologul și politicianul Raspail, Galois și mulți alții. Folosind cuvintele lui Dumas[13], „ar fi greu de găsit în tot Parisul două sute de oaspeți mai ostili guvernului decât aceștia". Cum șampania n-a întârziat să curgă la sfârșitul mesei, s-au propus multe toasturi: pentru revoluțiile din 1789 și 1793, pentru Robespierre, pentru mulți alții. Unul dintre toasturile cele mai articulate intelectual a fost propus de Dumas, care declara: „Beau pentru artă! Fie ca pana și pensula să contribuie tot atât cât tunul și sabia la primenirea socială căreia i-am dedicat viețile noastre și pentru care suntem pregătiți să murim." În acel moment, Galois, care ședea în capul uneia dintre mese, a sărit în picioare, pentru a propune și el un toast. Ținând în aceeași mână un pahar cu vin și un pumnal marinăresc deschis, el a fost auzit strigând: „Pentru Louis-Philippe!" Evenimentul a fost descris ulterior destul de amănunțit în memoriile lui Dumas:

> Deodată, în toiul unei conversații particulare pe care o aveam cu persoana din stânga mea, numele Louis-Philippe, urmat de cinci sau șase fluierături, m-a făcut să ciulesc urechile. Una

dintre cele mai însuflețite scene se desfășura la cincisprezece sau douăzeci de scaune de mine.

Un tânăr, ținând în aceeași mână un pahar ridicat și un pumnal deschis, încerca să se facă auzit. Era Évariste Galois, ucis apoi în duel de Pescheux d'Herbinville, acel fermecător tânăr care făcea cartușe din hârtie de mătase, pe care le înnădea cu panglici trandafirii.

Pe atunci, Évariste Galois avea abia 23 sau 24 de ani. Era unul dintre cei mai înflăcărați republicani. Era așa de mult zgomot, că însăși cauza lui era de neînțeles.

Tot ce am putut pricepe este că exista o amenințare și că se pronunțase numele lui Louis-Philippe; intenția fusese făcută clară de cuțitul deschis.

Împrejurarea depășea cu mult convingerile mele republicane. Am cedat presiunii vecinului meu din stânga care, fiind unul dintre comedianții regelui, nu avea chef să fie compromis și am sărit de pe pervazul ferestrei, în grădină.

M-am dus acasă cam îngrijorat. Era clar că acest episod nu va rămâne fără consecințe. Într-adevăr, două sau trei zile mai târziu, Évariste Galois a fost arestat.

Există câteva inexactități supărătoare în descrierea lui Dumas (de ex., privind vârsta lui Galois), iar la problema identității celui care l-a omorât pe Galois voi reveni mai târziu, dar faptele de bază sunt, neîndoielnic, corecte. *La Gazette des Écoles*, care-l sprijinise pe Galois în altercația cu Guigniault, a publicat propria ei variantă a evenimentului, în numărul din 12 mai: „Au fost propuse multe toasturi; pare-se că un instigator, zis a fi un student, s-a ridicat de la masă, a scos din buzunar un stilet și, agitându-l prin aer, a început să strige: « Iată cum îi voi jura credință lui Louis-Philippe ».“ Agitând pumnalul, Galois a fost perceput ca făcând o amenințare la viața regelui. A fost arestat a doua zi în casa mamei sale, ținut în detenție preventivă la închisoarea Sainte-Pélagie și adus la judecată pe 15 iunie 1831.

Procedurile legale s-au deschis[14] cu o serie de întrebări de rutină puse de judecătorul care prezida instanța, ce urmăreau, în esență, ca Galois să descrie evenimentele de la banchet. Atunci s-a petrecut ceva neașteptat. Prizonierul a fost întrebat: „Ați scos un cuțit… și ați rostit « Pentru Louis-Philippe » ?“ Spre

uimirea generală, Galois a răspuns: „Aveam un cuțit pe care-l utilizam ca să tai carnea din bucate. L-am fluturat, zicând, « Pentru Louis-Philippe, *dacă ne trădează* ». Ultimele cuvinte n-au fost auzite decât de cei din imediata mea vecinătate, din cauza tuturor fluierăturilor scoase de… cei care înțeleseseră cuvintele mele ca fiind un toast în sănătatea lui Louis-Philippe." Luat prin surprindere, judecătorul a întrebat dacă Galois se temea cu adevărat că exista un pericol ca regele să-și abandoneze datoriile și să-și trădeze națiunea. Évariste a răspuns: „Toate acțiunile regelui, deși nu arată încă rea-credință, ne permit să ne îndoim că este de bună-credință." Discuția dintre judecător și Galois a continuat o vreme. Au fost chemați martori, atât pentru acuzare, cât și pentru apărare. Chestiunea caracterului privat sau public al întâlnirii a devenit problema centrală. În cel din urmă caz, ambiguul toast al lui Galois putea fi luat drept o provocare, cu intenția de a incita la violență împotriva regelui. Remarcile concluzive ale lui Galois au fost tăiate scurt de judecătorul prezident, care, înțelept, a priceput că tânărul cu sânge fierbinte și-ar fi putut pune singur ștreangul de gât prin afirmații imprudente și inflamatoare. După deliberări care n-au durat decât o jumătate de oră, Galois a fost achitat. Potrivit legendei, imediat după citirea verdictului, Galois și-a luat calm pumnalul de pe masa de probe materiale a tribunalului și a părăsit în tăcere curtea de justiție. Dat fiind că înregistrarea grefierului spune că în timpul procesului Galois a pretins că își pierduse pumnalul când a plecat din restaurant, această legendă nu poate fi confirmată. Într-un fel sau în altul, temperamentalul tânăr de 19 ani era din nou liber pe străzi.

Pe 15 iunie, în aceeași zi în care a început procesul lui Galois, ziarul *Le Globe* a decis să facă publică povestea frustrantei lui experiențe cu academia. Un articol scris cel mai probabil de unul dintre frații Chevalier, prieteni cu Galois, începea descriind geniul acestuia și spunând că el descoperise independent proprietățile funcțiilor eliptice (care-l făcuseră celebru pe Abel). Textul relata apoi incredibilele tribulații prin care trecuse Galois din cauza vârfurilor lumii matematicii. În special, articolul

istorisea ghinioanele avute de el cu memoriul asupra rezolvabilității ecuațiilor.

> Anul trecut, înainte de 1 martie, Dl. Galois a trimis un memoriu la secretariatul Institutului Franței, asupra rezolvabilității ecuațiilor algebrice. Acest memoriu era lucrarea cu care el se înscria la concursul pentru Marele Premiu de Matematică. Memoriul depășea anumite dificultăți, pe care Lagrange însuși nu le-a rezolvat. Dl. Cauchy îl elogiase pe autor pe acest subiect. Dar ce s-a întâmplat? Memoriul s-a pierdut, iar premiul a fost acordat [lui Abel și lui Jacobi], fără ca tânărul savant să poată participa la concurs. Într-o replică la o scrisoare trimisă Academiei de tânărul Galois, plângându-se de tratamentul neglijent de care a avut parte lucrarea sa, tot ceea ce a putut scrie Dl. Cuvier era: „Chestiunea e foarte simplă. Memoriul s-a pierdut la moartea D-lui Fourier, căruia îi fusese încredințată sarcina de a-l examina." Or, memoriul a fost rescris și prezentat din nou Institutului. Dl. Poisson, care trebuie să-l evalueze, nu și-a făcut încă această datorie, rezultatul fiind că vreme de mai mult de cinci luni nefericitul său autor a tot așteptat un cuvânt amabil de la Academie.

Interesant, presupunând că Galois însuși le furnizase fraților Chevalier conținutul articolului, aflăm că domnul Cauchy își exprimase aprecierea la adresa lucrării sale, chiar dacă nu reușise să transmită același entuziasm academiei. Poate că drept răspuns la această critică publică a neglijenței academiei, Poisson și Lacroix au dat, în sfârșit, verdictul cu privire la lucrarea lui Galois. Raportul lor este datat 4 iulie 1831 și a fost prezentat în ședința din ziua de 11 iulie. Era o bombă – ei nu aprobau teoria lui Galois. Într-un raport nu prea zelos[15], care demonstrează clar că Poisson și Lacroix fie n-au reușit să înțeleagă, fie, în cel mai bun caz, aveau prejudecăți împotriva inovativelor idei de teoria grupurilor ale lui Galois, raportorii scriu evaziv:

> Am făcut toate eforturile posibile pentru a înțelege demonstrația Dlui Galois [a condițiilor în care o ecuație este rezolvabilă printr-o formulă]. Raționamentele sale nu sunt nici suficient de clare, nici suficient dezvoltate pentru a ne permite să judecăm exactitatea lor, așa încât nu suntem într-o poziție

> care să ne îngăduie să formulăm vreo opinie. Autorul afirmă că teorema care face subiectul particular al memoriului său este parte a unei teorii generale, ce ar putea conduce la multe alte aplicații. Se întâmplă frecvent ca diferite părți ale unei teorii să se clarifice una pe alta și sunt mai ușor de priceput luate împreună, decât separat. Trebuie, de aceea, să așteptăm ca autorul să-și publice lucrarea în integralitatea ei pentru a ne forma o opinie definitivă; în starea în care este în prezent partea supusă atenției Academiei, nu vă putem recomanda să vă dați aprobarea.

Academia a adoptat concluziile acestui raport negativ. Chiar dacă acceptăm faptul că nu claritatea fusese vreodată punctul forte al lui Galois și că explicațiile date lăsau puțin de dorit, nu putem evita concluzia că una dintre cele mai imaginative realizări din istoria algebrei își avea încă de așteptat acceptarea din partea unei audiențe conservatoare. În esență, ideile lui Galois au căzut victime faptului că nu erau cele la care se așteptau Poisson și Lacroix. Referenții credeau că vor găsi în manuscris un criteriu simplu, bazat pe niște coeficienți care să le spună imediat dacă orice ecuație particulară este rezolvabilă printr-o formulă sau nu. În loc de aceasta, ei se treziseră în fața unui întreg nou concept – teoria grupurilor – și a unor condiții bazate pe soluțiile ecuației, considerate drept existente. Acest lucru era prea inovativ pentru a fi acceptat în 1831.

La închisoare

Sentința academiei era o lovitură năprasnică pentru Galois. Cu toate acestea, convins de corectitudinea ideilor sale, Galois a adăugat, sub una dintre adnotațiile critice făcute de Poisson pe manuscris, următoarele cuvinte: „Să judece cititorul“ (în figura 61 este prezentată pagina respectivă). Înrăit pe plan științific și predispus spre violență în cel politic, Galois vedea cum și relația cu propria mamă devenea neplăcut de încordată. De aceea, a părăsit casa părintească și a închiriat o cameră pe Rue des Bernardins, la numărul 16 (figura 62).

Figura 61

Necazurile nu vin niciodată singure, ci cu ghiotura. Se apropia Ziua Bastiliei (14 iulie), iar republicanii făceau planuri pentru o mare demonstrație. Mai exact, ei doreau să organizeze o ceremonie provocatoare pentru comemorarea plantării, cam cu patruzeci de ani mai înainte, a unui simbolic arbore al libertății în Place de la Bastille. Poliția a luat măsuri preventive, arestând mulți activiști cunoscuți în noaptea de 13 spre 14 iulie. Galois a reușit să scape de închisoare fie fiindcă nu era pe „lista neagră" a poliției, fie fiindcă nu a dormit acasă. Pe la amiaza lui 14 iulie, totuși, un grup de circa șase sute de oameni condus de Galois și de prietenul său Ernest Duchatelet[16], un student de la École des Chartes, a început să traverseze Pont Neuf. Évariste purta uniforma gărzii naționale (ilegală pe atunci) și

Figura 62

era înarmat până-n dinți (având câteva pistoale, o pușcă încărcată și un pumnal). Fiind pregătită pentru posibile adunări subversive, poliția a intervenit cu repeziciune. Galois și Duchatelet au fost arestați pe pod, la fel cum s-a întâmplat și cu alți lideri republicani, în alte locuri. Pentru a înrăutăți și mai mult lucrurile, Duchatelet a desenat pe zidul celulei o pară, simbolizând capul regelui. (Figura 63 arată o caricatură atribuită pictorului Honoré Daumier, în care Louis-Philippe se metamorfozează într-o pară.) Capul era desenat lângă o ghilotină și însoțit de o proclamație populară printre republicani la acea dată: „Philippe își va purta capul la altarul tău, o Libertate." Procesul lui Galois și Duchatelet a început pe 23 octombrie 1831. Fiindcă acuzația de purtare a unei uniforme ilegale putea fi contestată cu greu, era destul de clar că Galois va fi condamnat (posesiunea de arme era destul de uzuală pe atunci). Ceea ce a șocat întru câtva era sentința nerezonabil de aspră, de șase luni de închisoare. Duchatelet, care se bucura, probabil, de o mai mică reputație de tulburător al ordinii publice, n-a fost condamnat decât la trei luni de închisoare. (N-am găsit nici o probă care să sprijine speculația că sentința lui Duchatelet fusese redusă în schimbul acordului său de a colabora cu poliția.) Galois a făcut recurs, dar

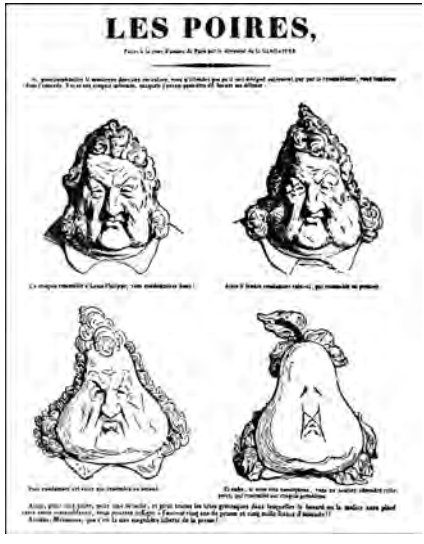


Figura 63

Figura 64

sentința sa a fost confirmată pe 3 decembrie. Cei doi au fost trimiși la închisoarea Sainte-Pélagie (figura 64), din cel de al cincilea arondisment al Parisului, nu departe de Jardin des Plantes (grădina botanică). Dintre ceilalți republicani arestați, biologul Raspail, el însuși un proeminent lider al Prietenilor Poporului, a fost deosebit de provocator în timpul propriului său proces, din 1832. El a mers până la a declara că regele, care-și trădase poporul, „ar trebui îngropat de viu sub ruinele Tuileriilor". Nici nu mai este nevoie să spunem că această declarație nu i-a atras multă simpatie din partea judecătorilor, care l-au condamnat la 15 luni de închisoare la Sainte-Pélagie.

Sainte-Pélagie era tipul de închisoare la care te-ai aștepta pentru Parisul acelei perioade. Un zid mare înconjura întregul complex, iar clădirile cu temnițe închideau trei curți interioare. Deținuții erau grupați după categoria infracțiunilor săvârșite, cei politici ocupând una dintre secțiunile laterale. Galois, care aparținea celei mai de jos clase în termeni de mijloace financiare, a stat, cel mai probabil, într-unul dintre dormitoarele cu 60 de paturi. Cei care-și permiteau își puteau chiar plăti accesul în celule private, mâncarea fiindu-le adusă de la restaurante locale. Mai toate informațiile despre condițiile mizerabile îndurate de Galois provin din scrieri ale celor trei persoane cărora le păsa de soarta lui: colegul său de pușcărie Raspail, ale cărui *Scrisori despre închisorile Parisului*[17] aveau să fie publicate opt ani mai târziu, poetul Gérard de Nerval (1808–1855), care a fost arestat în februarie 1832 și a scris chiar și un poem despre închisoare, și iubitoarea soră a lui Galois, Nathalie-Théodore, care-și vizita fratele de câte ori putea și a făcut orice-i stătea în puteri pentru a-i hrăni atât corpul, cât și sufletul. Două incidente dramatice descrise în amintirile lui Raspail sunt îndeosebi vrednice de atenție. Pe 29 iulie, în vreme ce deținuții erau în cea de-a treia zi în care comemorau cele „Trei zile

glorioase", un glonț tras din Rue du Puits de l'Ermite, din fața închisorii, l-a rănit pe unul dintre colegii de celulă ai lui Galois. În timpul întâlnirii ce a avut loc ulterior între o delegație de deținuți și guvernatorul închisorii, Galois, care era membru al delegației, a spus, se pare, că unul dintre gardienii închisorii ar fi tras și l-a și insultat pe guvernator. Drept consecință, a fost aruncat în carceră, ceea ce a provocat o reacție violentă din partea deținuților. Raspail îl citează pe unul dintre ei, care i-a vorbit astfel guvernatorului închisorii: „Acest tânăr Galois nu a ridicat tonul vocii, după cum bine știți; el rămâne la fel de rece ca și matematica lui atunci când vorbește." Ceilalți deținuți au dat glas asentimentului lor: „Galois în carceră! Oh, bastarzii! Au o ranchiună împotriva micului nostru savant." După această exclamație de sprijin, deținuții au luat controlul asupra închisorii, ordinea fiind restabilită abia a doua zi. De teama altor agitații, Galois a fost scos din carceră.

Raspail mai dă și o destul de vagă, dar tulburătoare descriere a unei tentative de sinucidere comise de Galois. Se pare că tânărul Évariste, care nu fusese obișnuit să bea mult, era adeseori forțat de colegii săi de detenție să se îmbete. „Ești un băutor de apă, tinere", își băteau ei joc de el, „O, Zanetto [porecla dată lui Galois de către deținuți], lasă partidul republicanilor și întoarce-te la matematica ta!" Cu una dintre aceste ocazii, adică beat fiind, tânărul i-a dezvăluit lui Raspail agonia prin care trecea de la moartea tatălui său: „Mi-am pierdut tatăl și nimeni nu l-a înlocuit vreodată." El a adăugat apoi o frază ce se va dovedi a fi înfiorător de profetică: „Voi muri într-un duel provocat de o cochetă de joasă clasă." Cum Raspail și alți câțiva deținuți încercau să-l întindă pe un pat, orb de beat ce era, Galois de striga: „Mă disprețuiești, tu, care ești prietenul meu! Ai dreptate, dar eu, cel care am comis această crimă, trebuie să mă sinucid!" Numai intervenția rapidă a deținuților l-a împiedicat pe Galois să-și ducă până la capăt această intenție fatală.

Descrierea făcută de Nerval[18] ultimelor sale minute petrecute în închisoare este la fel de mișcătoare: „Era ora cinci. Unul dintre tovarășii mei de închisoare m-a condus la poartă și m-a sărutat, făgăduindu-mi că va veni să mă vadă de îndată ce iese

din închisoare. El mai avea de ispășit două sau trei luni. Era nefericitul Galois, pe care nu l-am mai văzut, căci a fost ucis într-un duel, în dimineața în care și-a redobândit libertatea."

Totuși, cea care zugrăvește cel mai sfâșietor tablou al stării fizice și mintale a lui Galois este sora sa, Nathalie-Théodore. După o dureroasă vizită, chinuită, ea scrie în jurnalul ei: „Să îndure încă cinci luni fără o gură de aer proaspăt! E o foarte rea perspectivă și mă tem că sănătatea lui va avea mult de suferit. Este deja extrem de obosit. Nu-și îngăduie să fie distras de nici un gând, a căpătat un caracter sumbru, care-l face să pară mai bătrân decât este. Privirile îi sunt goale, de parcă ar avea cincizeci de ani."

Atunci când nu era beat, Galois își petrecea de regulă zilele plimbându-se neîncetat în jurul curții, de obicei adâncit în gânduri. Serile erau dedicate unor gălăgioase adunări republicane și unor ceremonii patriotice în jurul steagului tricolor. Cu toate acestea, Galois a găsit timp să scrie o lungă prefață (figura 65 arată prima pagină) pentru excepționalele sale memorii matematice. Aceasta era, în realitate, un aspru rechizitoriu al lumii științifice și al practicilor sale. Ea începe printr-o persiflare[19] a ierarhiei oamenilor de știință și a paralizantelor constrângeri impuse de nevoia de sprijin.

> În primul rând, veți observa că pagina a doua a lucrării nu e plină de nume, prenume, titluri, onoruri și elogii aduse vreunui prinț cărpănos, a cărui pungă se deschide la mirosul de tămâie, amenințând să se închidă atunci când tămâiernița rămâne goală. Nici nu veți întâlni, cu litere de trei ori mai mari decât capul vostru, un omagiu respectuos adus vreunei personalități de rang înalt din știință sau vreunui înțelept patron, un lucru socotit a fi indispensabil (era să zic inevitabil) pentru oricine dorește să scrie la douăzeci de ani.

Dacă am înlocui cuvântul „prinț" cu „agent de finanțare", spusele lui Galois ar rămâne valabile și astăzi, așa cum erau acum 170 de ani. După cum îmi spunea cândva un proeminent om de știință: „Între scrierea cererilor de finanțare prin care descriu ce *intenționez* să fac și scrierea rapoartelor despre ce *am făcut*, nu mai rămâne timp ca să și *fac* efectiv ceva!"

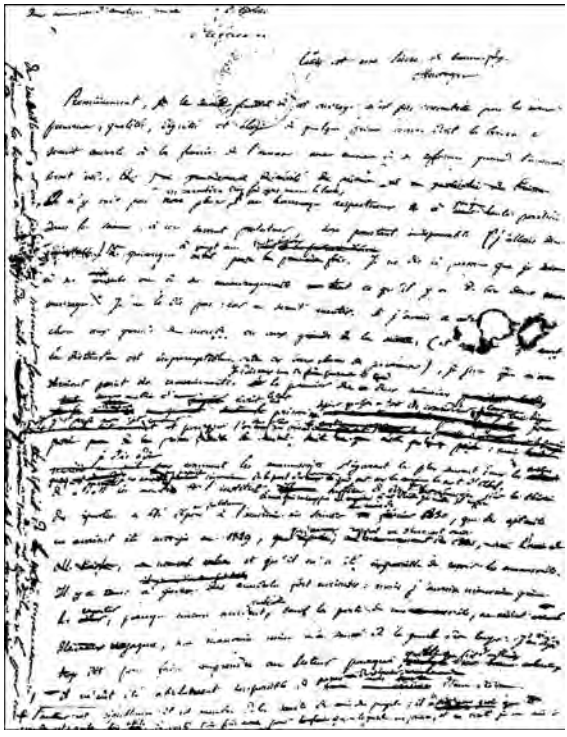


Figura 65

Prefața lui Galois se încheie pe un ton plin de speranță, deși ironic: „Atunci când competiția – adică, egoismul – nu va mai guverna în știință, atunci când oamenii se vor întovărăși pentru studiu și nu pentru a trimite pachete sigilate la academii, ei vor fi dornici să-și publice chiar și rezultatele nesemnificative, câtă vreme sunt noi, adăugând, « nu știu restul ».“

Un romantic îndrăgostit

În primăvara lui 1832, Europa a fost măturată de o devastatoare epidemie de holeră. Parisul a fost deosebit de grav lovit. Apa contaminată a râului Sena își cerea jertfa zilnică, de

aproximativ o sută de morți. În parte poate că datorită sănătății sale fragile, dar mai probabil fiindcă era o practică obișnuită cu deținuții politici, Galois a fost transferat, pe 13 martie[20], de la Sainte-Pélagie la un cămin de convalescenți[21] din Rue de Lourcine numărul 84-86 (mai târziu, Rue Broca numărul 94), unde a fost plasat pe cuvânt de onoare. În acest cămin, cunoscut pe atunci drept „Casa de sănătate" a lui Sieur Faultrier, s-a întâmplat ceva dramatic: Galois s-a îndrăgostit. Până atunci, poate că din cauza personalității dominatoare a mamei sale, Galois nu avusese relații cu femeile. De fapt, la una dintre bacanalele din închisoare, el i-a destăinuit lui Raspail: „Nu-mi plac femeile și mi se pare că n-aș putea iubi decât o Tarpeia sau o Graccha" (două legendare femei romane; Tarpeia și-a trădat cetatea, dând-o pe mâna sabinilor, iar Graccha este Cornelia Gracchus, mama și educatoarea lui Tiberius și Gaius). Obiectul afecțiunii sale înflăcărate era tânăra Stéphanie Potterin du Motel, care trăia în aceeași clădire a căminului de convalescență. Tatăl ei, Jean-Paul Louis Auguste Potterin du Motel, era un fost ofițer din armata lui Napoleon, iar fratele ei, care avea 16 ani pe atunci, avea să devină medic. Familia Potterin du Motel întreținea o strânsă legătură de prietenie cu proprietarul casei de convalescență.

Puține povești de dragoste din istorie[22] au avut consecințe mai tragice. Se prea poate ca inițial Stéphanie să-i fi arătat un oarecare interes pasionatului și inteligentului tânăr, dar nu i-a trebuit mult ca să-i respingă cu răceală avansurile. Pe dosul uneia dintre hârtiile sale deja utilizate, Galois a copiat două din scrisorile Stéphaniei. Din nefericire, aceste scrisori conțin întreruperi, în care lipsesc cuvinte și silabe. Cel mai probabil este că Galois rupsese originalele, cuprins de furie. Ulterior, el a încercat cu disperare să reconstituie cuvintele iubitei sale din fragmente, oricât de dureroase trebuie să fi fost aceste cuvinte.

Soarta unuia dintre cele mai mari genii care au trăit vreodată era pe cale de a fi pecetluită de remarcile zdrobitoare de inimi ale unei „infame cochete" care avea mai puțin de 17 ani pe atunci. Prima scrisoare, datată 14 mai 1832, sună astfel:

> Să punem capăt acestui lucru, asta e ceea ce te rog. Nu am suficientă minte să continui o corespondență de acest tip, dar voi încerca să am suficientă [minte] pentru a conversa cu tine, așa cum obișnuiam înainte de a se fi întâmplat ceva. Asta e, Monsieur, … există … care trebuie … tu … la mine și nu te mai gândi la lucruri care nu pot exista și care nu vor fi existat niciodată.

Scrisoarea lasă puțină îndoială asupra faptului că Galois, lipsit de experiență și, poate, cu sângele prea fierbinte, a făcut sau a spus ceva ce a ofensat-o pe Stéphanie sau a speriat-o, îndepărtând-o. Tonul rece sugerează că tânăra nu fusese prea entuziastă nici la început. Cea de a doua epistolă, cel mai probabil scrisă câteva zile mai târziu, era încă și mai devastatoare. Pe Stéphanie nu o mai interesa nici măcar o simplă prietenie.

> Am urmat sfatul tău și m-am gândit … ce s-a întâmplat …, s-a petrecut între noi, oricum ai vrea să-i spui. Mai mult, Domnule, fii sigur că sunt slabe șanse să mai fi fost și altceva; faci presupuneri greșite și regretele tale sunt neîntemeiate. Prietenie adevărată abia dacă există altfel decât între persoane de același sex, în special … prieteni … tânguire în vid care … absența oricărui sentiment de acest fel … încrederea mea … dar au fost rău lovite … m-ai văzut tristă, m-ai întrebat asupra motivului, am răspuns că sentimentele mele fuseseră lovite. M-am gândit că o vei lua ca orice persoană în fața căreia se rostește un cuvânt din acele … nu este …
>
> Calmul gândurilor mele îmi lasă libertatea de a judeca oamenii pe care-i văd de obicei nefăcându-și prea multe mustrări; acesta este motivul pentru care rareori regret că am greșit în privința lor sau că am fost influențată în părerea mea despre ei. Nu sunt de acord cu tine cu privire la senti[mentele] … mai mult decât a … cer nici … [Îți] mulțumesc sincer pentru toate acele [sentimente] prin care voiai să te apropii de mine.

Galois era devastat. Efectele puternice ale acestei povești asupra dispoziției și atitudinii sale emoționale cu privire la viață în genere pot fi apreciate din scrisoarea pe care a expediat-o pe 25 mai bunului său prieten Auguste Chevalier. La acea vreme, Auguste, fratele acestuia, Michel, și trei duzini de alți Saint-Si-

monieni înființaseră o comunitate mică în Ménilmontant, în estul Parisului. Galois scrie melancolic:

> Dragul meu prieten,
>
> Este o plăcere să fii trist, dacă poți spera la consolare. Ești fericit să suferi dacă ai prieteni. Scrisoarea ta plină de har apostolic mi-a dat ceva calm. Dar cum pot eu îndepărta orice urmă a unor emoții violente, precum cele pe care le-am trăit? Cum mă pot consola, când am secătuit într-o lună cea mai mare sursă de fericire pe care o poate avea un bărbat? Când am secătuit-o fără fericire, fără speranță, când sunt sigur că am epuizat-o pentru toată viața?

El a continuat cu o descriere de Casandră a agonicelor sale chinuri interioare: „Vreau să mă îndoiesc de cruda ta profeție, că nu voi mai face niciodată cercetare. Dar trebuie să admit că există ceva adevăr în asta; pentru a fi un savant, trebuie să fii numai savant. Inima mea se revoltă împotriva capului. Nu adaug, ca tine, « păcat »." Și a încheiat cu o licărire de speranță: „Te voi vedea pe 1 iunie. Sper să ne întâlnim deseori în prima jumătate a lui iunie. Voi pleca în jur de 15 la Dauphine." Dar luminița de la capătul tunelului, implicată de ultimele lui vorbe, este repede stinsă de fraza din post-scriptum: „Cum mă poate păngări o lume pe care o detest?"

Galois nu avea să-l mai revadă niciodată pe Auguste.

Ajungem acum la partea cea mai interesantă a poveștii lui Galois – la misterioasa sa moarte. Dați-mi voie să remarc încă de la început că, din punct de vedere pur matematic, pentru istoria teoriei grupurilor și aplicația sa la simetrii, nu contează de ce a murit Galois sau cine l-a ucis. Totuși, orice relatare a vieții acestui remarcabil geniu ar fi lacunară fără discutarea acestor chestiuni. În particular, există izbitoare similitudini între viețile celor două principale personaje din saga ecuației ce nu putea fi rezolvată – Abel și Galois. Amândoi au fost educați inițial de un părinte și inspirați apoi de un dascăl talentat. Amândoi și-au pierdut tatăl la o vârstă fragedă și au încercat să rezolve aceleași probleme de notorie dificultate. Dar asta nu-i totul. Amândoi au fost victime ale aceleiași conservatoare ierarhii matematice (Cauchy, în particular), nefericiți (pentru diferite

motive) în viețile lor și amândoi au murit tragic în floarea tinereții. Totuși, cunoaștem aproape fiecare detaliu al circumstanțelor morții lui Abel, în vreme ce moartea lui Galois este învăluită în mister, controversă și speculație. Această – cum să-i spun? – lipsă de simetrie m-a necăjit cu adevărat. Drept consecință, am luat hotărârea să investesc tot timpul și efortul care îmi vor fi necesare pentru a investiga orice aspect al vieții lui Galois și, în special, moartea sa. Am făcut tot ce se putea pentru a nu lăsa nici o piatră nerăsturnată, am citit orice document pe care am putut pune mâna și am vizitat majoritatea locurilor relevante. Nu pot decât să sper că rezultatele justifică efortul.

O moarte misterioasă

Faptele cunoscute privitoare la activitățile desfășurate de Galois[23] între 25 mai și acea dimineață fatidică de 30 mai, când și-a înfruntat adversarul într-un duel cu pistoale, sunt foarte puține. Pe 29 mai, în ajunul duelului, el a scris trei epistole. Prin una dintre ele, prezenta scuze „tuturor republicanilor“:

> Îi rog pe prietenii mei patrioți să nu-mi reproșeze că mor altfel decât pentru țara mea.
>
> Mor ca victimă a unei infame cochete și a doi naivi, păcăliți de ea. Viața mea se stinge într-o mizerabilă clevetire. Oh! De ce să mori pentru ceva atât de mic, pentru ceva atât de vrednic de dispreț!
>
> Cerul mi-e martor că numai constrâns și forțat am acceptat o provocare pe care am încercat s-o evit prin orice mijloc. Mă căiesc că am spus un adevăr neplăcut unor oameni care erau atât de puțin capabili să-l asculte calmi. Dar am spus adevărul. Iau cu mine în mormânt o conștiință netulburată de minciuni, nepătată cu sânge de patriot.
>
> Adio! Ceea ce m-a ținut în viață era binele public. Iertați-i pe cei ce mă ucid, căci ei sunt de bună-credință.

Ultimele cuvinte, amintind de cele rostite de Cristos pe cruce[24] („iartă-i, Doamne, căci nu știu ce fac“), reflectă urme ale educației religioase pe care o primise de la mama sa. Altminteri, dacă le luăm ca atare împreună cu scrisorile de la Stéphanie, tabloul

ce este schițat de această epistolă pare destul de limpede. Prin vorbe sau fapte, Galois a ofensat-o pe tânăra femeie, iar cei doi „păcăliți" de ea l-au provocat la duel. Galois nu le poartă pică celor doi bărbați, care „sunt de bună-credință", și nu regretă decât că a fost în întregime sincer. Se simte un element de concesie și de supunere în fața autorității în cuvintele lui Galois: „numai constrâns și forțat am acceptat o provocare". Voi reveni mai târziu la acest important punct.

După aceea, Galois le-a scris unor prieteni republicani, N.L. (aproape sigur Napoléon Lebon) și V.D. (aproape sigur Vincent Delaunay):

> Bunii mei prieteni,
>
> Am fost provocat [la duel] de doi patrioți... Mi-e cu neputință să refuz.
>
> Îmi cer iertare de a nu fi informat pe nici unul dintre voi. Dar adversarii mei mi-au cerut cuvântul de onoare că nu voi informa nici un alt patriot.
>
> Sarcina voastră este simplă: să dovediți că am luptat împotriva voinței mele, adică după ce am epuizat toate mijloacele posibile de compromis, și să spuneți că nu sunt capabil să mint, nici chiar pe un subiect atât de neînsemnat ca cel în chestiune.
>
> Amintiți-vă de mine, căci soarta nu mi-a hărăzit o viață îndeajuns de lungă pentru ca țara mea să-și amintească de mine.
>
> Mor ca prieten al vostru.

Această deprimantă scrisoare, luată din nou ad litteram, adaugă o importantă informație: adversarii erau „patrioți", ceea ce înseamnă republicani activi. Impresia că Galois cedează autorității este și mai mult accentuată: „Mi-e cu neputință să refuz... adversarii mei mi-au cerut cuvântul de onoare că nu voi informa nici un alt patriot... am luptat împotriva voinței mele." Galois subliniază, de asemenea, vehement și buna sa credință: „să spuneți că nu sunt capabil să mint".

A treia și, din perspectivă științifică, cea mai importantă scrisoare[25] este cea care conține testamentul matematic al lui Galois. Deosebit de lungă, aceasta este adresată devotatului său prieten Auguste Chevalier și prezintă rezumate concise ale

conținutului faimosului memoriu respins de Poisson și Lacroix, precum și ale altor lucrări.

> Dragul meu prieten,
>
> Am făcut câteva descoperiri noi în analiză. Prima privește teoria ecuațiilor, celelalte, funcțiile integrale.
>
> În teoria ecuațiilor, am investigat în ce condiții sunt ecuațiile rezolvabile prin radicali [printr-o formulă]: aceasta mi-a dat oportunitatea să aprofundez teoria și să descriu toate transformările ce se pot aplica unei ecuații, chiar dacă ea nu este rezolvabilă prin radicali.
>
> Toate acestea alcătuiesc trei memorii.

El schițează apoi ceea ce astăzi numim *teoria lui Galois*, adăugând câteva noi teoreme la conținutul manuscrisului original, înaintat academiei. Către sfârșit, Galois scrie: „Tu știi, dragul meu Auguste, că aceste subiecte nu sunt singurele pe care le-am explorat." Apoi, dând o scurtă descriere a altor câteva teme, conchide cu regret: „N-am timp și ideile mele nu sunt suficient de dezvoltate în acest domeniu – care e imens."

În final, ca și Abel înaintea lui, el își pune încrederea în judecata matematicianului german Jacobi: „Cere-i public lui Jacobi sau lui Gauss să-și spună părerea, nu cu privire la adevărul, ci la importanța acestor teoreme. După aceea, sper că unii vor găsi util să descifreze această harababură. Te îmbrățișez cu efuziune." Un singur lucru mai rămăsese de făcut – să lase în ordine manuscrisele. El a trecut rapid prin toate studiile sale matematice și a făcut unele corecții și comentarii de ultim minut. Una dintre adnotări (figura 66) conține cel mai memorabil și cel mai trist citat: „*Je n'ai pas le temps*" – „N-am timp".

Duelul a avut loc în primele ore ale dimineții de 30 mai 1832, în apropierea iazului Ghețarului de la Gentilly (astăzi, în cel de al treisprezecelea arondisment al Parisului). Circumstanțele exacte ale acestei drame nu se cunosc. Conform raportului de autopsie, Galois a fost împușcat în stomac, din partea dreaptă. Glonțul a străpuns mai multe segmente ale intestinului înainte de a se opri în fesa stângă. Ce s-a petrecut după aceea este neclar. Au părăsit martorii scena? Sau unul dintre ei este cel care l-a dus pe Galois la spital? Registrele spitalului Cochin

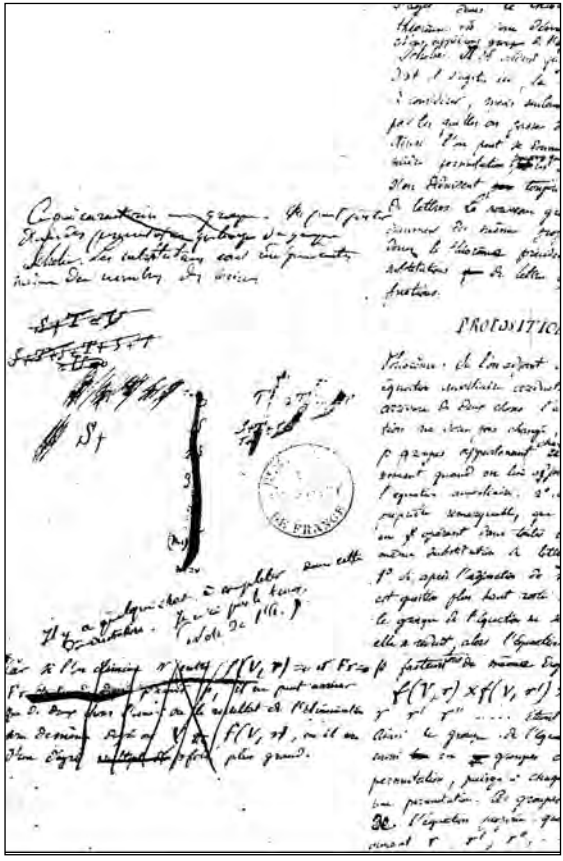


Figura 66

arată că Galois a fost adus la ora 9,30 dimineața (figura 67 arată intrarea și una dintre aripile spitalului, pe la sfârșitul secolului al XIX-lea) și i s-a repartizat patul numărul 6 în pavilionul Saint-Denis. Conform unei mărturii mult ulterioare a vărului lui Galois, Gabriel Demante, cel care l-a transportat la Cochin era un țăran aflat în trecere, dar o notă din *Magasin Pittoresque*, scrisă de Pierre Paul Flaugergues, un fost coleg de clasă al lui Évariste, îi atribuie acest rol de samaritean unui „fost ofițer“.

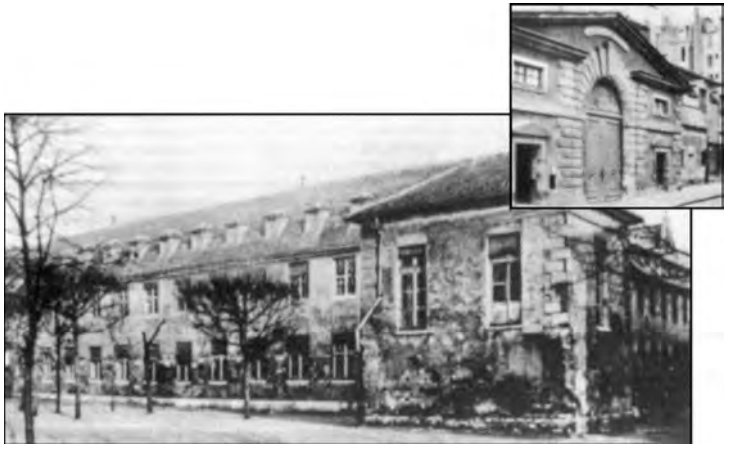


Figura 67

Fratele mai mic al lui Galois, Alfred, singurul membru al familiei care a fost anunțat, s-a grăbit să se ducă la spital. Chirurgul de serviciu, Denis Guerbois, și-a dat seama imediat că sfârșitul era aproape, ceea ce nu le-a scăpat nici celor doi frați. Încă pe deplin conștient, Galois a refuzat serviciile unui preot[26]. Lui Alfred, care plângea amarnic, el i-a cerut drept consolare: „Nu plânge; trebuie să-mi fac curaj ca să mor la 20 de ani." Évariste Galois a decedat la ora 10 a.m., pe 31 mai, iar certificatul de deces a fost semnat[27] pe 1 iunie. Moartea a trecut aproape neobservată. Pe 31 mai, *Bulletin de Paris* anunța[28] eronat: „Moartea lui Legallois".

Ziarul din Lyon *Le Précurseur*, care avea strânse legături cu Prietenii Poporului, a publicat în numerele sale din 4 și 5 iunie următoarea relatare (figura 68):

> Paris, 1 iunie – Un deplorabil duel a răpit ieri științelor exacte un tânăr care dădea cele mai mari speranțe, dar a cărui precoce celebritate nu evocă, totuși, decât amintiri politice. Tânărul Évariste Galois, condamnat la un an de închisoare pentru toastul rostit la banchetul de la Vendanges de Bourgogne, s-a duelat cu unul dintre vechii săi prieteni, foarte tânăr și el, tot membru al societății Prietenilor Poporului, despre care se știe

că a fost implicat, de asemenea, într-un proces politic. Se spune că amorul a fost cauza luptei. Pistolul fiind arma aleasă de cei doi adversari, ei au găsit că e foarte greu, din punctul de vedere al vechii lor prietenii, să țintească unul asupra celuilalt și s-au lăsat în seama deciziei oarbe a sorții. La distanță foarte mică unul de altul, fiecare dintre ei a fost înarmat cu un pistol și a tras. Numai una dintre aceste arme era încărcată. Galois a fost străpuns dintr-o parte în alta de glonțul adversarului său; a fost transportat la spitalul Cochin, unde a murit după aproximativ două ore. Era în vârstă de 22 de ani. L.D., adversarul său, este puțin mai tânăr.

— *Un duel déplorable a enlevé hier aux sciences exactes un jeune homme qui donnait les plus hautes espérances, et dont la célébrité précoce, ne rappelle cependant que des souvenirs politiques. Le jeune Evariste Gallois, condamné il y a un an pour des propos tenus au banquet des Vendanges de Bourgogne, s'est battu avec un de ses anciens amis, tout jeune homme comme lui, comme lui membre de la société des Amis du Peuple, et qui avait, pour dernier rapport avec lui, d'avoir figuré également dans un procès politique. On dit que l'amour a été la cause du combat. Le pistolet étant l'arme choisie par les deux adversaires, ils ont trouvé trop dur pour leur ancienne amitié d'avoir à viser l'un sur l'autre, et ils s'en sont remis à l'aveugle décision du sort. A bout portant, chacun d'eux a été armé d'un pistolet, et a fait feu. Une seule de ces armes était chargée. Gallois a été percé d'outre en outre par la balle de son adversaire; on l'a transporté à l'hôpital Cochin, où il est mort au bout de deux heures. Il était âgé de 22 ans. L. D., son adversaire, est un peu plus jeune encore.*

Figura 68

Ca în multe alte cazuri de relatare în presă a unui eveniment care, întâmplător, ne este familiar, această istorisire e încărcată cu inexactități. Duelul a avut loc pe 30, nu pe 31 mai; conform raportului de autopsie, împușcătura nu a fost de „la distanță foarte mică", ci de la 25 de pași; el nu fusese „condamnat la un an de închisoare", ci la șase luni; nu era în vârstă de 22 de ani, ci de numai 20. De aceea, și restul informațiilor din acest articol trebuie privite cu scepticism. Lucru adevărat îndeosebi dacă ne gândim că relatarea a apărut în Lyon, departe de capi-

tală. Cu toate acestea, dacă ar fi să luăm în serios descrierea detaliată a adversarului, pentru cine s-ar potrivi ea? Răspunsul este lesne de dat: pentru Duchatelet. El era, într-adevăr, un pic mai tânăr decât Galois, fusese arestat cu el pe Pont Neuf și fusese judecat puțin înaintea lui. Dar numele mic al lui Duchatelet era Ernest, iar articolul dădea inițialele „L.D.".

Mai există câteva piese de dosar pe care le-am putea lua în considerare. Mai întâi, vărul lui Galois, Gabriel Demante, i-a scris primului biograf al lui Galois, Paul Dupuy, că la ultima întâlnire a lui Galois cu Stéphanie, Évariste s-a găsit în prezența a „unui așa-zis unchi și a unui așa-zis logodnic", fiecare dintre ei provocând duelul. Galois însuși a vorbit mereu de doi bărbați (atât în scrisoarea „către toți republicanii", cât și în scrisoarea către prietenii săi). De aceea, orice încercare de a descoperi adevărul trebuie să identifice ambii adversari, nu numai unul.

În al doilea rând, amintiți-vă că scriitorul Alexandre Dumas, atunci când descrie în memoriile sale evenimentele legate de dezastruosul toast rostit de Galois, îl numește pe Pescheux d'Herbinville drept ucigașul lui Galois. Deși, în mod normal, n-ar trebui să considerăm „D" drept inițiala lui d'Herbinville, practicile și stilul scrierii numelor în secolul al XIX-lea permiteau asemenea libertăți. Spre exemplu, numele de familie al lui Stéphanie se scria uneori du Motel, alteori Dumotel. Chiar și numele de familie dinspre partea maternă a lui Évariste s-a schimbat din de Mante în Demante (anexa 8). Pescheux d'Herbinville n-a fost niciodată într-un proces cu Galois, dar a fost în „procesul celor nouăsprezece".

În cele din urmă, șeful poliției Henri-Joseph Gisquet (1792–1866) scria în memoriile sale, în 1840, că Galois „a fost ucis de un prieten".

Spre ce converg oare toate acestea?

O mulțime de teorii ale conspirației

Câțiva biografi ai lui Galois, nu mulți, au concluzionat că Galois fusese ucis de inamicii politici. Unii dintre aceștia au inclus în comploturile lor imaginare chiar și o intrigă, presupunând că

„infama cochetă“ era, de fapt, o prostituată sau o misterioasă agentă de poliție, care a acționat ca provocatoare. Acest lucru nu este surprinzător. Chiar și Alfred Galois a rămas convins întreaga viață că fratele său fusese victima poliției secrete a regelui. Dar există vreo dovadă convingătoare pentru asemenea teorii ale conspirației? Nu, categoric. Cele mai multe dintre aceste povești fanteziste au fost create *înainte* de identificarea certă a lui Stéphanie du Motel ca fiind „infama cochetă“. Investigația „medico-legală“ care a dezvăluit identitatea ei a fost efectuată de un detectiv sui-generis – un preot uruguayan. Carlos Alberto Infantozzi de la Universitatea din Montevideo efectiv nu se putea da bătut. Mai întâi, el a utilizat o lupă și o lumină specială pentru a descoperi numele și semnătura lui Stéphanie sub ștersăturile lui Galois de pe câteva din manuscrisele sale. Apoi, el s-a chinuit să scotocească prin arhive pentru a descoperi numele tatălui ei, Jean Louis Auguste Potterin du Motel, și adresa familiei, de la căminul de convalescenți Faultrier. Este aproape sigur că Stéphanie nu era nici prostituată, nici agent de poliție. Ea s-a căsătorit în cele din urmă, pe 11 ianuarie 1840, cu Oscar Théodore Barrieu, profesor de limbi străine. Tatăl lui Stéphanie nu era medic, așa cum au dedus unii biografi de la Infantozzi, ci fost ofițer în armata lui Napoleon și inspector în sistemul penitenciar. El a decedat cam pe vremea când s-a căsătorit fiica sa. Fratele lui Stéphanie, Eugene P. Potterin du Motel, a ajuns în cele din urmă medic, dar n-avea decât 16 ani pe timpul „poveștii“ lui Stéphanie cu Galois. Cercetătorul Jean-Paul Auffray, care a efectuat ceea ce este probabil cea mai extinsă investigație a documentelor referitoare la Galois, a descoperit un alt fapt interesant. Denis Louis Grégoire Faultrier, după care a fost numit căminul de convalescenți, fusese el însuși căpitan în garda națională. După moartea tatălui lui Stéphanie, acest prieten intim al familiei Potterin du Motel s-a căsătorit cu mama lui Stéphanie. După cum vom vedea peste puțin timp, acest detaliu poate oferi o piesă crucială a tabloului în curs de reconstituire.

Atunci, v-ați putea întreba, oare de ce insista Alfred Galois să susțină că fratele său fusese asasinat de poliție? Trebuie să

ne reamintim că Alfred, pe atunci în vârstă de 18 ani, avea o infinită admirație pentru fratele mai mare. Pentru el, ideea că genialul, cumsecadele, dar altminteri sentimentalul și nesocotitul său frate era implicat într-un duel trebuie să fi fost atât de absurdă, încât singura explicație posibilă i s-a părut a fi cea a unui joc necinstit. Primul biograf al lui Galois, Dupuy, al cărui substanțial articol a fost publicat în 1896, a concluzionat că în toate afirmațiile lui Alfred (inclusiv o pretenție total nefondată că Galois a tras mai întâi în aer) „se simte o invenție romantică". Fizicianul și autorul Tony Rothman, în prezent la Bryn Mawr College, a ajuns la o concluzie similară. După o examinare aprofundată a multor biografii existente în 1982 (și a unor lucrări ulterioare), el a conchis că „poveștile lui Bell, Hoyle și Infeld [toți biografi ai lui Galois] sunt invenții baroce, dacă nu chiar bizantine". Sunt total de acord.

Există însă și o altă teorie a conspirației, care se impune să fie luată serios în considerare. Într-una dintre cele mai recente și mai extinse biografii ale lui Galois, italianca Laura Toti Rigatelli, matematician și istoric al matematicii, propune teza că faimosul duel n-ar fi avut loc, de fapt, niciodată. Ea a ajuns la concluzia că deprimatul și deziluzionatul Galois a decis să se sacrifice pentru cauza republicană. Republicanii aveau nevoie de un cadavru ca să stârnească rebeliunea și el a oferit acest cadavru – duelul era în întregime regizat. Deducția lui Toti Rigatelli se bazează pe o cercetare de mare anvergură și, în particular, pe o examinare a scrierilor prefectului de poliție Gisquet și ale unuia dintre spionii săi sub acoperire, Lucien de la Hodde.

Deși teoria lui Toti Rigatelli este cert interesantă, personal, eu nu o găsesc deosebit de convingătoare. Pentru ca istorisirea ei să reziste, Toti Rigatelli este forțată să susțină că Galois a fabricat ultimele sale trei scrisori, pentru a „evita ca cineva să suspecteze adevărata împrejurare a morții sale". Acest lucru nu ar fi numai în totală contradicție cu felul de a fi al lui Galois, care a ținut mereu cu tărie la adevăr, așa cum îl vedea el, dar ar fi și incompatibil cu teoria însăși a conspirației. Cu siguranță, pentru a instiga la revoluție, o scrisoare blamând poliția pentru moartea sa ar fi fost mult mai eficace. O examinare mai atentă

a scenariului conceput de Toti Rigatelli dezvăluie că ceea ce ea privește drept cea mai tare piesă probatoare în sprijinul ipotezei că Galois s-a sacrificat este, în exprimarea sa, „insistența asupra unei morți sigure", ce reiese din scrisorile lui „către toți republicanii" și către Lebon și Delaunay. Dar la ce altceva ne-am putea aștepta de la epistolele de adio ale unui romantic zdrobit, în vârstă de 20 de ani, scrise în ajunul unui duel? În afară de asta, așa cum voi argumenta peste puțină vreme, există motive să credem că cel puțin unul dintre adversarii lui Galois mânuia mult mai bine pistolul decât tânărul matematician. De aceea, este pe deplin de înțeles de ce se aștepta Galois la o moarte sigură. Atunci, cine l-a ucis pe Galois și de ce a fost el ucis?

Moartea unui romantic

Dovezile acumulate lasă foarte puțină îndoială cu privire la realitatea duelului. Indiciile spun, de asemenea, că acesta era un caz clasic de *cherchez la femme*. Prin unele cuvinte neatente sau printr-un comportament prea impetuos, Galois a ofensat-o cumva pe tânăra doamnă, care i-a informat imediat pe alți doi bărbați. Când acești „păcăliți" s-au confruntat cu Galois, el a mai făcut o greșeală, referindu-se la întreaga afacere ca la „o mizerabilă clevetire" și adăugând, deci, o insultă la injurie. Consecințele au fost dezastruoase. Grăbiți să apere onoarea lui Stéphanie, cei doi bărbați l-au provocat pe Galois la duel. Cine erau acești doi bărbați? Din scrisoarea lui Galois, știm că ei erau, amândoi, „patrioți" republicani. Limbajul lui Galois sugerează, de asemenea, cu tărie că cel puțin unul dintre cei doi adversari avea o oarecare poziție de autoritate, căreia Galois s-a simțit silit să-i cedeze. Atât tatăl lui Stéphanie, Jean Louis Potterin du Motel, un fost ofițer în Marea Armată a lui Napoleon, cât și proprietarul căminului de convalescenți, Denis Faultrier, un fost căpitan în garda națională, corespund cu acest profil. Să observăm, totuși, că cel din urmă ar fi compatibil și cu o altă piesă de dosar. Vărul lui Galois l-a descris pe unul dintre adversari drept un „așa-zis unchi". Faultrier, prieten apropiat de familie, care ulterior s-a căsătorit cu mama lui

Stéphanie, se potrivește ca o mănușă cu această descriere. Cât privește identitatea celui de-al doilea adversar, situația este oarecum mai puțin clară. În recenta și bine documentata sa biografie a lui Galois, Auffray sugerează că cei doi bărbați erau tatăl lui Stéphanie și Faultrier. Această concluzie ignoră atât mărturia vărului (cu privire la un „așa-zis logodnic"), cât și descrierea din *Le Précurseur*, ceea ce eu găsesc dificil de acceptat. Deși articolul din *Le Précurseur* conține multe inexactități, acestea sunt de tipul la care ne așteptăm de la asemenea relatări. Combinația dintre descrierea lui Gabriel Demante a unui „așa-zis logodnic" și relatarea din ziar pare să implice un presupus iubit. Dar pe cine?

Ernest Armand Duchatelet, tânăr student la École des Chartes și prieten al lui Galois, se potrivește cel mai bine. Să ne reamintim că și prefectul Gisquet a depus mărturie că Galois „a fost ucis de un prieten". Trebuie să admit că am fost incapabil să găsesc vreo dovadă documentată că Duchatelet ar fi petrecut un timp la căminul de convalescenți Faultrier – el a fost eliberat din închisoare cu mai multe luni înainte de a se fi transferat Galois acolo. Totuși, fiindcă deținuții politici erau de obicei plasați pe cuvânt de onoare în astfel de „case de sănătate", Duchatelet s-ar putea să fi fost acolo înainte de sosirea lui Galois. În afară de asta, lui Galois îi era îngăduit să primească vizitatori și, într-adevăr, prietenul său Auguste Chevalier a venit să-l vadă acolo. N-ar fi o exagerare incredibilă să presupunem că a fost vizitat și de Duchatelet. În sfârșit, împotrivirea celor doi prieteni (descrisă în ziar) de a ținti unul asupra altuia și decizia lor, încărcând numai un pistol, de a lăsa soarta oarbă să determine cine avea să moară, este pe deplin compatibilă cu caracterele lor[29] (vezi și notele).

Este posibil ca adversarul să fi fost Pescheux d'Herbinville? Nu foarte probabil. El nu se potrivește cu descrierea din ziar; avusese foarte puține ocazii, dacă a avut, de a o întâlni pe Stéphanie (fiind dintr-un cerc social foarte diferit) și există posibilitatea să fi fost homosexual (cum se insinuează în descrierea pe care i-o face Dumas). Atunci, de ce oare l-o fi numit Dumas? Nu știu de ce, dar este cunoscut faptul că Dumas a greșit[30] cu

astfel de detalii în multe ocazii. Să fi confundat un tânăr republican cu un altul, n-ar fi de mirare.

Iată de ce aș îndrăzni să propun[31] varianta ca cei doi adversari ai lui Galois să fi fost Duchatelet și Faultrier. Dar este, cu aceasta, rezolvat misterul vechi de aproape două sute de ani cu privire la persoana care l-a ucis pe Galois și motivul ei? Poate. Deși cred cu tărie că acest duo Faultrier–Duchatelet este compatibil cu toate faptele cunoscute, fiind absentă orice informație solidă, dacă nu apar noi dovezi în viitor, vor mai rămâne multe incertitudini.

Presupunând că această concluzie cu privire la identitatea celor doi adversari este corectă, se poate creiona următorul tablou al evenimentelor din ziua duelului: în dimineața de 30 mai 1832, Galois și Duchatelet s-au înfruntat de la 25 de pași, cu Faultrier așteptându-și rândul. Printr-o procedură gen ruletă rusească, Duchatelet s-a întâmplat să aleagă arma încărcată și l-a împușcat pe Galois.

Raportul de autopsie dezvăluie două informații suplimentare interesante. Prima, deși Galois fusese lovit din lateral, el nu stătuse complet întors într-o parte[32], într-un mod care să fi minimizat șansele de a fi nimerit. Nu-și dorea să trăiască? Dată fiind starea sa mintală, acest lucru nu-i imposibil. La urma urmei, din mohorâtul punct de vedere al lui Galois, povestea vieții sale ar putea fi rezumată, mai mult sau mai puțin, după cum urmează: două încercări ratate de a intra la École Polytechnique, trei memorii respinse de academie, două întemnițări și o inimă zdrobită de dragoste neîmpărtășită. De fapt, cu puțin înainte să moară, Galois s-a desenat pe el însuși sub forma lui Riquet à la Houppe[33] (figura 69), un pitic cocoșat imaginar, care era foarte deștept și se purta cavalerește, dar toată lumea din juru-i îl batjocorea. În această poveste din secolul al XVII-lea, Riquet a vindecat o tânără femeie de stupiditate și, în cele din urmă, i-a câștigat dragostea, devenind simbolul unei transformări de tip Frumoasa și Bestia. Trist, dar Galois a fost mai puțin norocos în viața reală. În al doilea rând, raportul de autopsie descrie o contuzie mare la capul lui Galois, cauzată probabil de căzătură. Dacă era inconștient în urma loviturii și a fost

Figura 69

presupus mort, s-ar putea explica un fapt care i-a nedumerit pe mulți dintre biografii săi – majoritatea (dacă nu toți) celor prezenți la duel au părăsit scena. Potențiala identificare a lui Faultrier drept unul dintre adversari rezolvă un alt mister care i-a intrigat pe mulți cercetători – de ce nu l-a dus unul dintre martori pe Galois la spital? În scenariul propus, Faultrier, „fostul ofițer", ar putea fi, într-adevăr, cel care l-a transportat pe Galois la Cochin. Un indiciu privitor la faptul că Galois își amintea în permanență de tatăl lui ar putea fi furnizat de următoarea curiozitate: întrebat la spital de adresa sa, Galois a indicat Rue Saint-Jean-de-Beauvais numărul 6, adresa din Paris la care Nicolas-Gabriel își luase viața.

Faimă postumă

Înmormântarea lui Galois avu loc sâmbătă, pe 2 iunie. Au luat parte mii de prieteni, membri ai Prietenilor Poporului, și delegații de studenți de la școlile de drept și de medicină. Conducătorii Prietenilor Poporului, Plagniol și Charles Pinel, au rostit înflăcărate panegirice. Dacă republicanii aveau planuri să profite de înmormântare pentru a provoca o răzmeriță, acestea au fost rapid dejucate de o neașteptată întorsătură a evenimentelor. Prefectul de poliție Gisquet, care în seara precedentă arestase circa 30 de republicani drept măsură de precauție, urmărea cu atenție procesiunea. El scrie în memoriile sale[34]:

> Pe 2 iunie, republicanii au însoțit, în număr de două până la trei mii, procesiunea funerară a lui Legallois [scriind greșit Galois], cu intenția de a ridica baricade la întoarcere; dar au aflat de moartea Generalului Lamarque [un faimos general din armata lui Napoleon] și și-au dat imediat seama de avantajul pe care l-ar putea avea de pe urma unui asemenea eveniment și de mulțimea pe care înmormântarea generalului[35] ar putea-o atrage. Planul lor s-a modificat imediat: coșciugul unui general al Imperiului, al unui deputat patriot, este cel care va da semnalul începerii rebeliunii. Mișcarea a fost, de aceea, amânată până pe data de 5.

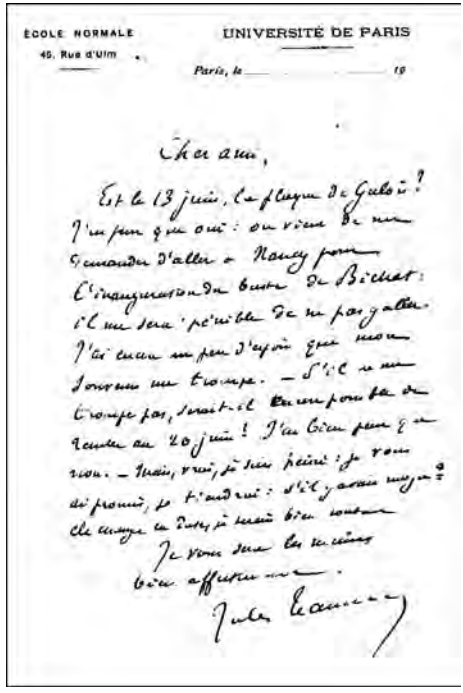
Soarta l-a lipsit deci pe Galois până și de ocazia de a incita la o rebeliune după moartea sa. Adânc mișcat, Auguste Chevalier a scris un scurt necrolog, care a apărut în septembrie 1832.

Din fericire, divinitățile au fost mai generoase cu testamentul matematic al lui Galois. Doi tineri perseverenți – fratele său, Alfred, și prietenul său, Auguste Chevalier – și-au asumat misiunea de a se asigura că amintirea lui Évariste și studiile sale matematice vor fi salvate de la uitare (figura 70 prezintă un portret al lui Galois, desenat din memorie de Alfred[36], în 1848). Cu scrupulozitate, ei au adunat fiecare bucată de hârtie, au catalogat toate manuscrisele și au înmânat prețioasa lor comoară matematicianului Joseph Liouville (1809–1882). Acesta din urmă, copleșit de admirație, și-a început astfel adresa către Academia

Figura 70

de Științe: „Sper să stârnesc interesul Academiei anunțând că între hârtiile lui Évariste Galois am găsit o soluție – pe cât de exactă, pe atât de profundă – a acestei frumoase teoreme: Dată fiind o ecuație ireductibilă de grad prim, de decis dacă este rezolvabilă sau nu prin radicali.“ Liouville a publicat memoriile lui Galois în revista sa din 1846, anunțând lumii: „Am recunoscut exactitatea deplină a metodei prin care Galois demonstrează, în particular, această frumoasă teoremă [despre rezolvabilitatea ecuațiilor].“ Curând avea să urmeze o recunoaștere mai largă. Jacobi, în care își pusese Galois încrederea, s-a dovedit a fi la înălțimea unei asemenea sarcini. Citindu-i studiile în revista lui Liouville, el l-a contactat imediat pe Alfred, într-o încercare de a afla mai multe amănunte despre lucrarea lui Galois asupra funcțiilor transcendentale. În 1856, teoria lui Galois era introdusă în cursurile avansate de algebră din Franța și Germania.

Școala care îl exmatriculase pe Galois și-a schimbat și ea sentimentele până la urmă. Cu ocazia celebrării centenarului, École Normale i-a cerut faimosului matematician norvegian Sophus Lie (1842–1899) să scrie un articol care să rezume impactul teoriei lui Galois asupra istoriei matematicii. Lie concluziona[37]: „Este deosebit de caracteristic pentru matematici că două dintre cele mai profunde descoperiri făcute vreodată (teorema lui Abel și teoria ecuațiilor algebrice, a lui Galois) au rezultat din munca a doi geometri, dintre care unul, Abel, era în vârstă de aproximativ 22 de ani, iar celălalt, Galois, nu împlinise 20.“ În 1897, când marele matematician Émile Picard (1856–1941) a evaluat realizările matematice ale secolului al XIX-lea, a avut următorul lucru de spus despre Galois: „Nimeni nu-l întrece în originalitatea și profunzimea concepțiilor sale.“


ÉCOLE NORMALE
45, Rue d'Ulm

UNIVERSITÉ DE PARIS

Paris, le 19

Cher ami,

Est-ce le 13 juin, la plaque de Galois ? J'ai pensé que oui : on vient de me demander d'aller à Nancy pour l'inauguration du buste de Bichat : il me sera pénible de ne pas aller. J'ai encore un peu d'espoir que mon souvenir me trompe. — S'il ne me trompe pas, serait-il convenable de remettre au 20 juin ! J'en serais peiné à vous. — Mais, vrai, je suis peiné : je vous ai promis, je tiendrai : s'il y avait moyen à cheminer un peu, je serais bien content.

Je vous serre les mains bien affectueusement.

Jules Tannery

Figura 71

Toți elevii de la École Normale erau prezenți pe 13 iunie 1909, când directorul ei, Jules Tannery, a venit la Bourg-la-Reine ca să facă o prezentare specială cu ocazia punerii plăcii comemorative[38] de pe casa lui Galois (figura 71 arată o scrisoare de la Tannery către primarul din Bourg-la-Reine, iar figura 72 arată placa pe casa originală). Abia stăpânindu-și emoțiile, Tannery a încheiat cu o mișcătoare mea culpa[39]:

> Am onoarea să rostesc aici o cuvântare, din poziția pe care o dețin la École Normale. Vă mulțumesc, Domnule Primar, că mi-ați permis să cer iertare geniului lui Galois în numele acestei școli în care a intrat fără tragere de inimă, unde nu a fost înțeles, care l-a dat afară, dar pentru care el a fost, la urma urmelor, una dintre cele mai strălucite glorii.

Figura 72

Aceste cuvinte sincere îmi răsunau în urechi în vreme ce stăteam în cimitirul din Bourg-la-Reine, unde amintirile lui Nicolas-Gabriel și Évariste Galois sunt de nedespărțit astăzi (figura 73), așa cum au fost tatăl și fiul în timpul scurtei vieți a lui Évariste.

Dar, oricât de ingenios ar fi, cum poate un instrument inventat pentru determinarea rezolvabilității ecuațiilor să evolueze până la nivel de limbaj descriptiv al tuturor simetriilor lumii? La urma urmelor, atunci când discutăm despre simetrii, nu ne gândim în primul rând la ecuații algebrice. Nici măcar Galois nu era sigur unde avea să ducă teoria sa: „Va fi posibil să se înțeleagă pe deplin teza generală pe care o avansez numai dacă cineva cu aplicație pentru ea citește lucrarea mea cu atenție.“ Acesta este exact locul unde apare magia unificatoare a teoriei grupurilor – acea „măreție a gândirii pornind de la începuturi atât de modeste“, pe care o aprecia așa de mult matematicianul britanic H.F. Baker. Pentru a ne da seama de incredibila putere de cuprindere a conceptului avansat de Galois, ne vom întoarce acum la domeniul grupurilor și simetriilor.

Figura 73

6
Grupurile

Galois a întors întreaga algebră cu susul în jos. Când vreți să știți dacă o ecuație este rezolvabilă sau nu, pur și simplu încercați s-o rezolvați, nu-i așa? Greșit, spune Galois. Tot ceea ce aveți de făcut este să examinați permutări ale soluțiilor, presupuse ca fiind existente. Cum pot permutările unor soluții pe care nici măcar nu le cunoașteți să vă spună ceva despre rezolvabilitate? Faptul că ele pot furniza măcar câteva informații noi se cunoștea de multă vreme în lumea exterioară matematicii. Anagramele – cuvinte sau fraze formate de literele altora, dispuse în ordine diferită – exact asta fac. Luați numele GALOIS, spre exemplu. Dacă admitem anagrame de două cuvinte, ajungem la combinații precum OIL GAS, LAS GOI, LA SOGI. Câte aranjamente diferite (neținând seama de înțeles) ale literelor din GALOIS putem realiza? Răspunsul nu este dificil, dar am putea începe cu un caz și mai simplu, pentru a descoperi regula generală. Literele A și B permit două aranjamente: AB și BA. Trei litere, A, B, C, pot forma șase permutări: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Modelul care apare este simplu. Cu A, B, C, există trei poziții unde poate fi pus A (prima, a doua și a treia). Pentru fiecare dintre aceste trei alegeri făcute pentru A, există exact două locuri rămase pentru litera B (de ex., dacă A este a doua, B poate fi prima sau a treia), iar pentru C mai rămâne un singur loc. Numărul total de aranjamente este de aceea $3 \times 2 \times 1 = 6$. Aceeași logică se aplică la orice număr de obiecte. Pentru cele șase litere ale cuvântului GALOIS, există $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ de permutări diferite, iar pentru un număr n oarecare de obiecte există $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \ldots \times 1$ permutări. Pentru a

economisi spațiu, matematicianul francez Christian Kramp (1760–1826) a introdus notația $n!$ (*n factorial*) pentru a nota acest ultim produs. Numărul de permutări realizate cu n obiecte diferite este de aceea tocmai $n!$

Unul dintre cele mai vechi studii ale permutărilor nu apare într-o carte de matematică, ci într-una a misticismului iudaic, ce datează dintr-o perioadă situată între secolele al III-lea și al VI-lea. *Sefer yetzira*[1] (Cartea Creațiunii) este scurtă, enigmatică și își propune să rezolve misterul creației examinând combinațiile literelor alfabetului ebraic. Premisa generală a cărții (atribuită de legenda kabalistică strămoșului evreilor, Avraam) este că diferite categorii de litere formează blocuri constructive divine, din care pot fi clădite toate lucrurile. În acest spirit, cartea afirmă că „două litere alcătuiesc două cuvinte, trei alcătuiesc șase cuvinte, patru alcătuiesc 24 de cuvinte, cinci alcătuiesc 120, șase alcătuiesc 720, șapte alcătuiesc 5 040".

Pentru a vedea cum descoperirea relațiilor dintre permutări și proprietățile lor poate conduce la o înțelegere nouă și mai profundă, să examinăm operația care permută[2] GALOIS în AGLISO. Această operație (cu notația introdusă în Capitolul 2) este reprezentată de:

$$\begin{pmatrix} \text{G A L O I S} \\ \text{A G L I S O} \end{pmatrix}$$

unde fiecare literă din rândul de sus se înlocuiește cu litera aflată direct sub ea. Și anume, G se înlocuiește cu A, A cu G, L rămâne pe loc, O se înlocuiește cu I, I cu S și S cu O.

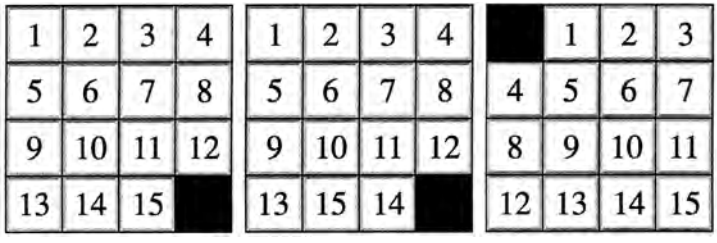
Ce se întâmplă dacă aplicăm aceeași operație de două ori? Puteți verifica lesne că efectuarea exact a acelorași substituții a doua oară transformă AGLISO în GALSOI. Să ne imaginăm acum că un calculator electronic o ia razna, repetând aceeași operație, să zicem, de 1 327 de ori. Putem prezice rezultatul final? Firește, l-am putea găsi aplicând operația iar și iar, dar acest lucru este extrem de plictisitor și, în mod sigur, expus la multe greșeli. Există un mod mai lesnicios de a găsi răspunsul? Poate că doriți să petreceți câteva minute gândindu-vă la această problemă, fiindcă descifrarea ei dezvăluie interesante proprietăți

ale permutărilor, care sunt în spiritul demonstrației lui Galois. În orice caz, voi da acum soluția.

În matematica distractivă, permutările și caracteristicile lor au jucat un rol important în cel puțin două foarte cunoscute jocuri – așa-zisul puzzle 14–15[3] și cubul lui Rubik.

Puzzle-ul 14–15 a fost introdus în anii 1870 de cel mai mare autor american de jocuri distractive, Samuel Loyd (1841–1911) și, un timp, a scos din minți o lume întreagă. Pe vremea aceea, Loyd era deja cel mai mare autor de probleme de șah din Statele Unite, precum și titularul rubricilor de șah din mai multe reviste. Chiar și mai înainte de celebrul puzzle 14–15, el publica o largă varietate de alte tipuri de probleme de matematică distractivă.

Acest puzzle 14–15 constă într-o grilă de 4×4 piese numerotate de la 1 la 15 (figura 74 a). Scopul general era de a deplasa piesele în sus, în jos sau lateral, așa încât, pornindu-se e la orice configurație inițială, să se ajungă la o succesiune firească. Versiunea particulară a acestui puzzle, care a produs atâta vâlvă, a fost cea în care toate numerele erau în ordine normală, cu excepția lui 14 și 15, care erau inversate (ca în figura 74 b). Loyd a oferit un premiu de o mie de dolari primei persoane care putea prezenta o serie de deplasări ducând la schimbarea între ele a pieselor 14 și 15. Enigma a creat o manie fără precedent și a fascinat oameni din toate categoriile sociale. Fiul lui Loyd, care a publicat ulterior o interesantă colecție de probleme distractive concepute de tatăl său (numită *Cyclopedia of Puzzles*), scria în descrierea nebuniei universale iscate de aici că „se știe că fer-



(a) (b) (c)

Figura 74

mierii și-au părăsit plugurile“ pentru a se lupta cu încăpățânata enigmă. În realitate, Loyd știa foarte bine că nu riscase absolut nimic oferind premiul – el putea demonstra că puzzle-ul nu putea fi rezolvat. Pentru a înțelege fondul demonstrației lui Loyd, să considerăm, de exemplu, următoarea permutare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 12 & 5 & 10 & 11 & 15 & 9 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Puteți lesne descoperi că această permutare este realizabilă pe baza grilei 1–15 a lui Loyd, dacă este aranjată inițial în ordine normală (ca în figura 74 a). Chiar și dacă nu aveți grila lui Loyd la îndemână, trasând mintal următoarea secvență de mișcări (unde fiecare număr reprezintă piesa ce trebuie deplasată în spațiul liber) – 15, 14, 13, 9, 5, 6, 7, 8, 12, 15 –, veți constata că aceasta produce permutarea indicată mai sus. Să numărăm câte perechi de numere din această permutare nu sunt în ordinea naturală. Spre exemplu, în ordinea naturală, 6 vine după 5, dar în această permutare ordinea lui 6 și 5 este inversată. Putem lua pe rând fiecare cifră din rândul al doilea, pentru a socoti numărul de inversări:

1	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
2	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
3	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
4	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
6	este urmat de 5	1 inversare
7	este urmat de 5	1 inversare
8	este urmat de 5	1 inversare
12	este urmat de 5, 10, 11, 9	4 inversări
5	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
10	este urmat de 9	1 inversare
11	este urmat de 9	1 inversare
15	este urmat de 9, 13, 14	3 inversări
9	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
13	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
14	nu contribuie cu nici o inversare	0 inversări
	Număr total de inversări	12

Numărul total, 12, este par, motiv pentru care această permutare particulară se numește o *permutare pară*. Similar, dacă numărul de inversări este impar, vorbim de o *permutare impară*. Câteva exerciții vă vor convinge că, prin construcție, permutările ce pot fi realizate cu jucăria lui Loyd sunt întotdeauna pare atâta vreme cât începeți cu ordinea naturală și terminați lăsând colțul din dreapta jos gol. Fiindcă inversarea a numai o pereche de numere, 14 și 15, are drept rezultat o permutare impară (1 inversare), oricât v-ați strădui, nu veți putea niciodată ajunge să obțineți ordinea naturală. Loyd era asigurat că nu va fi nevoit să plătească premiul oferit.

Dacă acest joc v-a stârnit întru cumva interesul și se întâmplă să fiți în posesia unei jucării concepute de Loyd, poate că doriți să încercați următorul lucru: Credeți că, pornind de la o configurație inițială ce are piesele 14 și 15 inversate (figura 74 b), puteți ajunge la ordinea naturală dacă pătratul gol din configurația finală este colțul din stânga sus (ca în figura 74 c)? Răspunsul este prezentat în Anexa 9.

Cam la un secol după apariția puzzle-ului lui Loyd, arhitectul maghiar Ernö Rubik a venit cu o jucărie și mai sofisticată, extrem de populară. Cubul Rubik (figura 75) constă dintr-o matrice $3 \times 3 \times 3$ de cuburi mai mici. Fețele cuburilor mici sunt colorate diferit, iar fețele cubului mare sunt fixate pe pivoți, astfel încât să se poată roti în diferite direcții. Obiectivul jocului este cel de a da fiecărei fețe a cubului mare o singură culoare.

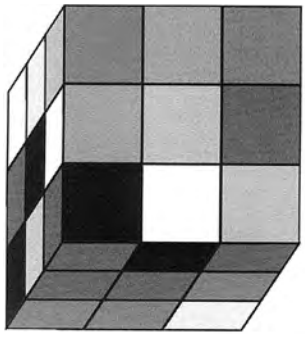


Figura 75

Rubik a inventat cubul în 1974[4] și până în 1980 acesta a devenit o senzație internațională. Vreme de circa trei ani, nebunia declanșată de Rubik a bântuit lumea. De la școlari până la înalții funcționari din birouri luxoase, toți încercau să rezolve cubul, într-un timp din ce în ce mai scurt. În onoarea inventatorului[5], pe 5 iunie 1982, Budapesta a găzduit primul campionat mondial pentru cel mai

rapid jucător. Acolo s-au prezentat campionii tuturor celor 19 concursuri naționale organizate anterior. Câștigătorul, Minh Thai, din Statele Unite, a obținut un uluitor timp de 22,95 secunde, deși cuburile folosite în competiție erau noi și, de aceea, mai lente în rotațiile lor decât unele mult utilizate. De atunci, s-au înregistrat și performanțe mai bune. În momentul în care scriu, danezul Jess Bonde este posesorul recordului de timp realizat într-un campionat oficial – 16,53 secunde! Chiar dacă am exclude nenumăratele imitații ale Cubului Rubik, un amețitor număr de peste 200 de milioane de cuburi s-au vândut până la această dată în toată lumea.

Fiindcă există nu mai puțin de 43.252.003.274.489.856.000 de combinații diferite pe care le poate etala cubul, vă puteți imagina că nimeni nu le-a încercat pe toate pentru a rezolva problema. În schimb, fiecare mișcare a Cubului Rubik poate fi reprezentată ca o permutare a vârfurilor sale. Într-adevăr, soluția problemei cubului[6] poate fi integral descrisă în limbajul teoriei grupurilor. Matematicianul David Joyner[7] de la U.S. Naval Academy a sistematizat chiar și un curs complet de teoria grupurilor în jurul Cubului Rubik și a unor jocuri matematice similare.

Revenind acum la problema GALOIS-AGLISO prezentată la începutul acestei secțiuni, cum putem găsi ce permutare s-ar obține după 1 327 de aplicări ale aceleiași transformări? Mai întâi, să observăm că operația lasă litera L neschimbată, în a treia poziție. În al doilea rând, descoperim că literele O, I, S sunt permutate în așa fel încât impresia este de mișcare „în jurul unui cerc" (ca în figura 76). Acest lucru este similar cu o tehnică practicată de regulă în baschet, în care jucătorii stau în șir indian și, după ce aruncă la coș, fiecare revine la coada șirului. Permutările de acest tip se numesc *ciclice*. O importantă proprietate a lor este aceea că ele revin la ordinea originală după un număr fixat

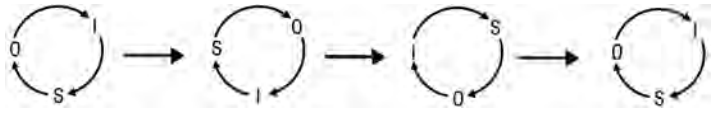


Figura 76

de aplicări, numit *perioadă*. Figura 76 arată că permutarea ciclică a lui O, I, S este de *perioadă* 3 – ordinea OIS este restabilită după trei pași. Ultimul punct de remarcat cu privire la operația GALOIS-AGLISO este că literele G și A sunt transpuse, revenind la ordinea lor originală după fiecare două operații. Dacă punem la un loc toate aceste informații, descoperim un mod lesnicios de a rezolva problema. Fiindcă O, I, S revin la ordinea lor inițială la fiecare trei pași, iar G, A, la fiecare doi pași (și L rămâne neschimbat), revenim la cuvântul original GALOIS după fiecare $3 \times 2 = 6$ pași (puteți verifica acest lucru repetând substituțiile de șase ori). Numărul 1 327 este egal cu $6 \times 221 + 1$. Aceasta înseamnă că după cel de-al 1 326-lea ($= 6 \times 221$) pas, literele formează cuvântul GALOIS, iar după încă un singur pas, acesta se schimbă în AGLISO – cuvântul final. O lecție importantă este de învățat de aici: *Analiza proprietăților permutării ne-a permis să prezicem cu precizie rezultatul final, fără a trebui să efectuăm experimentul*. Aceasta era filozofia pe care se baza și teoria lui Galois. El a descoperit un mod ingenios de a determina dacă o ecuație este rezolvabilă, din examinarea proprietăților de simetrie ale permutărilor soluțiilor sale.

Exact așa cum două amestecări consecutive ale unui pachet de cărți de joc nu duc decât la o amestecare diferită, efectuarea unei permutări urmată de o alta are drept rezultat o a treia permutare. Drept consecință, permutările satisfac automat condiția de închidere a grupurilor. Amintiți-vă că *închiderea* înseamnă că aplicând legea de compoziție pentru a compune două elemente ale grupului, obținem un alt element al aceluiași grup. Spre exemplu, mulțimea tuturor numerelor pozitive (întregi, fracționare și iraționale) formează un grup față de operația de înmulțire obișnuită. În particular, cerința de închidere este satisfăcută deoarece produsul dintre oricare două numere pozitive este, de asemenea, un număr pozitiv. Identificarea permutărilor drept instrumente matematice cruciale, demne de studiu, l-a adus deci pe Galois pe drumul ce ducea spre formularea teoriei grupurilor.

Grupuri și permutări

Permutările și grupurile sunt intim legate între ele. De fapt, conceptul de grup s-a născut din studiul permutărilor. Pentru Galois, acesta nu era decât primul pas dintr-o serie de ingenioase invenții și idei, ce au pavat calea către strălucita sa demonstrație.

Să reamintim pe scurt definiția precisă a grupului, introdusă în capitolul 2. Un *grup* este format din elemente care trebuie să asculte de patru reguli ce țin de legea de compoziție. De exemplu, să luăm în considerare mulțimea tuturor deformărilor posibile ce pot fi efectuate asupra unei bucăți de plastilină, operația fiind definită drept „urmat de". Regulile sunt după cum urmează. Prima, compunerea oricăror două elemente prin legea de compoziție trebuie să ducă la obținerea unui alt element (această proprietate se numește *închidere*). Evident, o deformare a plastilinei urmată de o a doua deformare generează, pur și simplu, o altă deformare. A doua, operația trebuie să fie *asociativă*, ceea ce înseamnă că dacă se compun trei elemente ordonate, rezultatul nu depinde de care două dintre ele se compun mai întâi. Transformări succesive, cum sunt deformările unei bucăți de plastilină, satisfac automat această regulă. A treia, grupul trebuie să conțină un „status-quo" sau un *element neutru*, care fiind compus cu oricare alt element lasă acel element neschimbat. Pentru bucata de plastilină, deformarea „nu face nimic" joacă acest rol. În sfârșit, pentru fiecare element al grupului, trebuie să existe un „așa cum erai" sau un *element simetric*, astfel încât dacă se compune un element cu simetricul său, să rezulte elementul neutru. Pentru orice deformare a bucății de plastilină, există o contradeformare care o readuce la forma originală.

Să examinăm acum mulțimea tuturor permutărilor posibile[8] ale numerelor 1, 2, 3:

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$$
$$I \qquad s_1 \qquad s_2 \qquad t_1 \qquad t_2 \qquad t_3$$

Aici, pentru a ne putea referi la ele, am notat cu un simbol fiecare dintre diferitele operații. Elementul neutru, care lasă

ordinea numerelor identică, este notat cu I. Fiecare dintre operațiile t_1, t_2 și t_3 *transpune* sau schimbă între ele două dintre numere, lăsându-l pe al treilea pe loc. Cele două operații s_1 și s_2 sunt ambele permutări *ciclice*, mișcând numerele în jurul unui cerc.

Să observăm acum ce se petrece dacă aplicăm succesiv două operații de permutare. Reamintesc că important este care număr îl înlocuiește pe care, iar nu ordinea în care sunt ele scrise. Să luăm, spre exemplu, t_1 urmată de s_1. Operația t_1 îl lasă pe 1 la locul lui, după care s_1 îl schimbă pe 1 în 2. Rezultatul net este, de aceea, transformarea $1 \to 2$. În același timp, t_1 înlocuiește 2 cu 3, după care s_1 înlocuiește 3 cu 1, producând rezultatul net $2 \to 1$. În sfârșit, 3 este transformat în 2 de operația t_1 și apoi înapoi în 3 de operația s_1. Găsim că t_1 urmată de s_1 dă permutarea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

care este tocmai operația t_3. Cu alte cuvinte, dacă simbolul o desemnează operația „urmat de", găsim că $s_1 \circ t_1 = t_3$ (amintiți-vă că operația aplicată prima este întotdeauna cea din dreapta).

„Tabla înmulțirii" completă pentru cele șase permutări ia forma:

$\circ$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{t_1}$	$\boldsymbol{t_2}$	$\boldsymbol{t_3}$
$\boldsymbol{I}$	I	s_1	s_2	t_1	t_2	t_3
$\boldsymbol{s_1}$	s_1	s_2	I	t_3	t_1	t_2
$\boldsymbol{s_2}$	s_2	I	s_1	t_2	t_3	t_1
$\boldsymbol{t_1}$	t_1	t_2	t_2	I	s_1	s_2
$\boldsymbol{t_2}$	t_2	t_3	t_1	s_2	I	s_1
$\boldsymbol{t_3}$	t_3	t_1	t_2	s_1	s_2	I

unde intrarea din, să spunem, rândul s_2 și coloana t_3 dă rezultatul lui $s_2 \circ t_3$, care este t_1. La prima privire, această tablă poate părea o harababură, dar o examinare mai atentă dezvăluie un

important adevăr: *Mulțimea tuturor permutărilor a trei elemente formează un grup*. De fapt, acest enunț este adevărat pentru permutările oricărui număr de elemente. Tabla demonstrează atât închiderea (compunerea oricăror două permutări de trei elemente dă altă permutare de trei elemente), cât și faptul că fiecărei permutări îi corespunde una simetrică – una care anulează efectul celei dintâi. În acest caz, puteți verifica faptul că s_1 și s_2 sunt simetrice – aplicând cele două transformări una după alta, se reface ordinea originală ($s_1 \circ s_2 = I$; $s_2 \circ s_1 = I$). Analog, fiecare dintre operațiile t_1, t_2, t_3 este propriul său simetric. Adică, aplicând-o pe oricare dintre ele de două ori, se reface *statu-quo*-ul ($t_1 \circ t_1 = I$; $t_2 \circ t_2 = I$; $t_3 \circ t_3 = I$). Grupul tuturor celor $n!$ permutări a n elemente diferite se notează de obicei cu S_n. Numărul elementelor unui grup poartă denumirea de *ordinul* grupului. Ordinul grupului permutărilor a trei obiecte, S_3, spre exemplu, este 6, din cauză că există exact șase astfel de permutări.

De ce ne interesează dacă permutările formează grupuri sau nu? Nu numai din cauză că, din perspectiva istoriei, acestea au fost instrumentele matematice care au dat naștere pentru prima dată conceptului de grup, dar și fiindcă aceste grupuri particulare sunt, într-un anume sens, în centrul teoriei gupurilor.

Pentru a demonstra rolul special al grupurilor de permutări, să analizăm din nou simetriile triunghiului echilateral. Ne amintim că erau șase astfel de simetrii care lasă triunghiul neschimbat, corespunzând elementului neutru, rotației cu 120°, rotației cu 240° și reflexiei în raport cu trei axe (vezi figura 9, pagina 23. În Capitolul 2, am descoperit că mulțimea simetriilor oricărui obiect formează un grup. Fiindcă grupul simetriilor triunghiului are exact același număr de elemente ca și grupul de permutări a trei obiecte – ambele sunt de ordin 6 – are sens să ne întrebăm dacă nu cumva există o legătură între aceste două grupuri. Dar ce face, în realitate, o rotație de 120° a triunghiului, în sens trigonometric (figura 77)? Ea nu face altceva decât să ia vârful

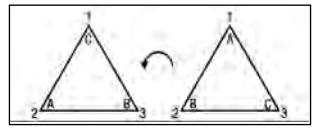


Figura 77

A și să-l miște din poziția 1 în poziția 2. În același timp, ea mișcă vârful B din poziția 2 în poziția 3 și vârful C din poziția 3 în poziția 1. Cu alte cuvinte, putem vedea această rotație ca fiind nimic altceva decât o permutare a pozițiilor 1, 2, 3 în raport cu vârfurile triunghiului ce se rotește:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog, fiecare dintre celelalte cinci simetrii ale triunghiului corespunde uneia dintre celelalte permutări – *structura celor două grupuri este identică*! Aceasta stabilește o neașteptată și intimă legătură între simetrii și permutări, prin teoria grupurilor. Conștientizarea ei stă la baza unei importante teoreme demonstrate în 1878 de matematicianul englez Arthur Cayley (1821–1895). Enunțată în limbaj simplist, teorema face o afirmație remarcabilă: *Orice grup este turnat în același mulaj*[9] *ca și un grup de permutări*. Adică, în pofida imensei latitudini pe care definiția grupurilor o permite, există întotdeauna un grup de permutări care, pentru toate scopurile practice, este identic cu orice grup. În jargon matematic, două grupuri care au aceeași structură sau aceeași „tablă a înmulțirii", ca în cazul grupului de permutări a trei elemente și al grupului de simetrii ale triunghiului echilateral, se numesc *izomorfe*. Pentru a da un alt exemplu, să ne amintim din Capitolul 2 că grupul simetriilor corpului omenesc are două elemente – transformarea identică și reflexia în raport cu un plan vertical (aceasta din urmă reprezentând simetria bilaterală). „Tabla înmulțirii" pentru acest grup față de operația „urmat de" (unde I și r simbolizează transformarea identică, respectiv reflexia) ia forma (din cauză că aplicarea reflexiei de două ori reface figura originală):

$\circ$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{r}$
$\boldsymbol{I}$	I	r
$\boldsymbol{r}$	r	I

Să examinăm acum un grup simplu, compus din numerele 1 și –1, față de operația de înmulțire obișnuită. Tabla înmulțirii (de data aceasta la propriu) pentru acest grup este:

×	**1**	**–1**
1	1	–1
–1	–1	1

Dacă analizați cele două table descoperiți imediat că ele au exact aceeași structură odată ce faceți corespondența $I \leftrightarrow 1$, $r \leftrightarrow -1$. Grupul de simetrii ale figurii umane este *izomorf* cu acest grup multiplicativ cu două elemente.

În afară de conceptul fundamental de grupuri de permutări, mai există un instrument matematic ingenios de care Galois avea nevoie pentru a-i permite să abordeze demonstrația problemei nerezolvabilității printr-o formulă a oricărei ecuații de grad cinci (sau mai mare). Acesta era conceptul de *subgrup*. Asemenea unor facțiuni ale partidelor politice care ocazional devin ele însele partide, anumite submulțimi de elemente ale unui grup pot satisface ele însele toate cele patru cerințe, pentru a forma un grup (închidere, asociativitate, element neutru, element simetric). În acest caz, se spune că submulțimea formează un subgrup. De exemplu, permutările I și t_3 de la pagina 189 formează un subgrup al grupului permutărilor de trei elemente S_3, deoarece $I \circ t_3 = t_3$ și $t_3 \circ t_3 = I$ (vezi tabla înmulțirii de la pagina 190), ceea ce implică închidere și înseamnă că atât t_3, cât și I au propriile lor simetrice. Dacă împărțim ordinul (numărul de elemente) grupului părinte (6 în cazul lui S_3) la ordinul subgrupului (2 pentru subgrupul de mai sus), obținem *factorul de compoziție*. În exemplul de mai sus, *factorul de compoziție* este $6 : 2 = 3$. Faptul că acesta este număr întreg nu e întâmplător. O importantă teoremă datorată lui Lagrange ne asigură că așa se va întâmpla întotdeauna. Ordinul unui subgrup finit divide întotdeauna exact ordinul grupului. Nu veți găsi niciodată că un grup de ordin 12 are un subgrup de ordin 5, 7 sau 8; el poate avea doar subgrupuri de ordin 2, 3, 4 sau 6.

Galois era acum în posesia tuturor elementelor de care simțea că are nevoie pentru demonstrație, dar se cerea încă un uriaș salt imaginativ pentru a le corela, așa încât să creeze un tablou coerent. Un nou capitol de istorie a matematicii era pe punctul să înceapă.

Strălucita demonstrație a lui Galois

Într-o faimoasă caricatură semnată de Sidney Harris, se văd doi savanți lângă o tablă acoperită cu ecuații. Unul arată spre cuvintele „APOI SE PETRECE UN MIRACOL" care sunt scrise între două ecuații complicate, iar legenda sună așa: „Mă gândesc că ar trebui să fii mai explicit aici, la pasul doi." Perspicacitatea lui Galois era de-a dreptul miraculoasă. În istoria științei, chiar și realizarea marilor descoperiri poate fi, de obicei, explicată prin ceva ce plutea „în aer" la acea vreme. Acestea sunt idei cărora le venise timpul. Cei mai mulți fizicieni vor fi de acord, spre exemplu, că dacă n-ar fi propus Einstein teoria sa a relativității restrânse, din care a rezultat faimoasa ecuație $E = mc^2$, mai devreme sau mai târziu altcineva ar fi ajuns la aceeași idee. O notabilă excepție, unde nu plutea aproape nimic „în aer" – unde aceeași grandioasă viziune nu s-ar fi materializat probabil decât mult, mult mai târziu – este teoria einsteiniană a relativității generale. Ea spune că forța gravitațională nu face nimic altceva decât să reflecte geometria spațiului și a timpului. Corpurile masive deformează spațiul-timp în jurul lor, exact așa cum bilele grele de popice încovoaie pista. În mișcarea lor în jurul Soarelui, planetele urmează orbite curbate nu din cauza vreunei insondabile atracții, ci din cauza acestei deformări. Această idee a reprezentat o asemenea revoluție în perceperea structurii universului, încât celebrul fizician american Richard Feynman (1918–1988) a spus odată: „Încă nu pot pricepe cum s-a gândit la asta." Chiar și astăzi, la nouăzeci de ani de la primul articol despre relativitatea generală, intuiția lui Einstein mai produce uimire. (Voi reveni la relativitatea generală în Capitolul 7.)

Mulți matematicieni sunt cuprinși de un respect similar atunci când se gândesc la Galois. Joseph Rotman de la Universitatea din Illinois îmi spunea: „Inventarea grupurilor de către Galois a fost o lovitură de geniu. La urma urmelor, marele matematician Abel, care s-a ocupat în aceeași perioadă de problema rezolvabilității prin radicali, n-a ajuns la teoria grupurilor. Într-adevăr, doar Cauchy, la întoarcerea sa în Franța, în anii 1840, părea să aprecieze realizările lui Galois, și intensele studii de teoria grupurilor ale lui Cauchy sunt cele care au condus la utilizarea teoriei grupurilor în alte domenii ale matematicilor." Algebristul Peter Neumann de la Universitatea Oxford adăuga: „Galois a dat dovadă de o extraordinară putere de pătrundere în priceperea grupurilor, luate separat, dar la fel de extraordinar a fost modul în care a înțeles cum ar putea ele fi utilizate în teoria ecuațiilor – creând în cele din urmă ceea ce numim acum teoria lui Galois (care, în fond, este teoria modernă a ecuațiilor)."

Așadar, cum și-a demonstrat Galois ingenioasele afirmații? Deși esența demonstrației sale este oarecum tehnică, ea ne pune la dispoziție o atât de unică fereastră ce dă spre neîntrecuta sa creativitate, încât – hotărât lucru – merită efortul de a arunca o privire prin ea. Urmărirea pașilor logici ai acestei demonstrații poate fi comparată cu străbaterea labirintului minții lui Mozart în vreme ce-și compunea una dintre simfonii.

Demonstrația conține trei componente cruciale[10], toate marcate de originalitate și de imaginație. Galois a început prin a arăta că orice ecuație are propriul ei „profil de simetrie" – un grup de permutări (acum numit grupul lui Galois) care reprezintă proprietățile de simetrie ale ecuației. Importanța acestui pas nu poate fi subliniată îndeajuns. Înaintea lui Galois, ecuațiile erau clasificate numai după gradul lor: pătratice, cubice, cuartice și așa mai departe. Galois a descoperit că simetria era o caracteristică mai importantă. Clasificarea ecuațiilor după gradul lor este analogă cu gruparea blocurilor constructive de lemn dintr-o cutie de jucării conform cu dimensiunile lor. Clasificarea lui Galois după proprietățile de simetrie este echivalentă cu conștientizarea faptului că forma acestor blocuri – rotundă, pătrată sau triunghiulară – este mai importantă. Concret, pentru

o ecuație, grupul lui Galois este cel mai mare grup de permutări ale soluțiilor, presupuse drept existente, care lasă neschimbate valorile anumitor combinații ale acestor soluții. Spre exemplu, să luăm grupul permutărilor a două elemente. Acest grup este compus din doi membri – transformarea identică și operația care schimbă între ele cele două elemente. Să examinăm acum ecuația pătratică. Putem nota cele două soluții ale sale, presupuse a exista, cu x_1 și x_2. În mod clar, combinația care dă suma celor două soluții[11], $x_1 + x_2$, rămâne neschimbată sub influența ambilor membri ai grupului de permutări a două obiecte. Transformarea identică lasă x_1 și x_2 intacte, iar schimbarea între ele a lui x_1 și x_2 nu face decât să transforme $x_1 + x_2$ în $x_2 + x_1$, care are aceeași valoare. Pentru ecuații de grad n, știm din teorema fundamentală a algebrei, a lui Gauss, că ele au n soluții. Numărul maxim de permutări posibile ale celor n soluții este $n!$, iar grupul conținând toate aceste permutări este grupul numit anterior S_n. Galois a reușit să demonstreze că pentru orice grad n, se pot găsi întotdeauna ecuații pentru care grupul lui Galois este întregul S_n. Cu alte cuvinte, el a arătat că pentru orice grad există ecuații care posedă *simetria maximă posibilă*. Sunt ecuații de grad cinci, spre exemplu, pentru care grupul Galois este S_5.

Cea de-a doua componentă esențială a demonstrației lui Galois era tot o inovație. După ce a introdus conceptul de subgrup, el a dat acestui concept o nouă particularitate, definind un *subgrup normal*. Să luăm spre exemplu grupul de șase permutări a trei elemente, S_3. Puteți verifica lesne că o submulțime compusă din trei operații I, s_1, s_2, (vezi pagina 189) formează un subgrup al lui S_3. Închiderea este garantată prin faptul (vezi tabla înmulțirii de pe pagina 190) că $s_1 \circ s_1 = s_2$, $s_2 \circ s_2 = s_1$, iar s_1 și s_2 sunt fiecare inversul celuilalt ($s_1 \circ s_2 = I$). Să notăm acest subgrup de trei membri cu T. Să presupunem acum că luăm orice membru al lui T, cum ar fi s_1, și-l „înmulțim“ la stânga cu un membru al grupului părinte S_3, să spunem t_1, și la dreapta cu elementul simetric al aceluiași membru (care se întâmplă să fie tot t_1, fiindcă este propriul său simetric). Adică, construim secvența de operații $t_1 \circ s_1 \circ t_1$. Utilizând „tabla înmulțirii“ de la pagina 190, descoperim că $s_1 \circ t_1 = t_3$ și că $t_1 \circ t_3 = s_2$. Cu alte cuvinte,

$t_1 \circ s_1 \circ t_1 = s_2$, iar s_2 este el însuși un membru al subgrupului T. Dacă orice membru al unui subgrup satisface această proprietate (că, înmulțindu-l la stânga cu un membru al grupului părinte și la dreapta cu simetricul acestuia, dă un membru al subgrupului), subgrupul poartă atunci denumirea de *subgrup normal*. Puteți verifica lesne că T este într-adevăr un subgrup normal al lui S_3. De fapt, T este subgrupul normal *maximal* (de ordinul cel mai înalt) al lui S_3. În general, dacă un grup are subgrupuri normale (altele decât grupul însuși), unul dintre acestea va fi cel mai mare. La rândul său, acest subgrup maximal poate avea el însuși, drept descendenți, niște subgrupuri normale. Unul dintre acestea va fi de ordinul cel mai înalt. În felul acesta, se poate întocmi o întreagă genealogie de subgrupuri normale maximale. Putem utiliza arborele familiei acestor subgrupuri pentru a crea un șir de *factori de compoziție* (ordinul grupului părinte împărțit la cel al subgrupului normal maximal). În cazul lui S_3 și T, factorul de compoziție este $6 : 3 = 2$. Singurul subgrup normal pe care îl are T este cel mai simplu, de fapt trivial, grup – cel compus doar din transformarea identică I. Acest grup este de ordinul 1. De aceea, factorul de compoziție dintre T și subgrupul său normal este $3 : 1 = 3$. Ierarhia generațiilor de grupuri S_3, T și cel compus doar din I ne dă, ca atare, șirul de factori de compoziție 2, 3.

Niciunde nu lumințează geniul lui Galois mai strălucitor decât în pasul al treilea al demonstrației sale. Aici el a utilizat toate creațiile imaginației lui. Întrebarea pe care chiar și marele Abel o lăsase deschisă – De ce este nevoie pentru ca o ecuație să fie rezolvabilă printr-o formulă? – era pe cale de a primi răspuns. Galois a arătat că, pentru a se bucura de luxul unei soluții determinate pe baza unei formule, ecuațiile trebuie să aibă un grup Galois de un tip foarte particular. Concret, el a spus că un grup este *rezolvabil* dacă fiecare dintre factorii de compoziție generați de subgrupurile sale normale maximale era un număr prim (divizibil numai cu 1 și cu el însuși). Astfel a putut justifica pe deplin utilizarea termenului „rezolvabil" demonstrând că, *pentru ca o ecuație să fie rezolvabilă printr-o formulă, condiția este ca grupul său Galois să fie rezolvabil.*

În esență, el a arătat că, dacă grupul Galois al unei ecuații este rezolvabil, procesul rezolvării ecuației poate fi descompus în pași mai simpli, fiecare implicând numai găsirea soluțiilor unor ecuații de grad mai mic.

Cum este utilizată teorema în practică? În cazul cubicei generale, spre exemplu, ecuația prezintă simetrie maximă dacă grupul său Galois este S_3 (grupul tuturor permutărilor celor trei soluții). S_3, totuși, este hotărât rezolvabil – după cum tocmai am văzut, ambii factori de compoziție 2 și 3 sunt numere prime. Drept urmare, cubica generală este rezolvabilă, după cum au arătat și dal Ferro, Tartaglia și Cardano. Pentru ecuația generală de gradul cinci, pe de altă parte, Galois a pornit într-un mod similar, demonstrând mai întâi că există ecuații pentru care grupul Galois este grupul permutărilor a 5 soluții, S_5. Aici, totuși, a venit poanta. Galois a demonstrat că S_5, ca grup, nu este rezolvabil (unul dintre factorii de compoziție reiese a fi 60, care nu este număr prim). Ecuația de gradul cinci, de aceea, are soarta rea a grupului Galois. Aceasta a încheiat demonstrația că ecuația generală de gradul cinci (și similar, orice ecuație generală de grad superior) nu este rezolvabilă printr-o formulă. Una dintre cele mai interesante probleme din istoria matematicii era, în sfârșit, pusă să se odihnească o dată pentru totdeauna. Pentru a realiza această sarcină herculeeană, totuși, Galois trebuise nu numai să vină cu idei strălucite, ci și să inventeze o întreagă nouă ramură a matematicilor și să identifice simetria drept sursa celor mai esențiale proprietăți ale ecuațiilor.

Concluzia definitivă asupra nerezolvabilității ecuației de gradul cinci printr-o formulă poate părea a fi dezamăgitoare, dar la ce comori a condus această „dezamăgire"! Să ne amintim de povestea biblică a regelui Saul. Atunci când măgarii lui Kiș, tatăl lui Saul, s-au rătăcit, Kiș îi spuse fiului său: „Ia unul din băieți cu tine; du-te și caută măgarii." Această căutare a măgarilor pierduți l-a condus pe Saul la profetul Samuel, care l-a uns pe tânăr drept primul rege al Israelului. Căutarea unei soluții pentru ecuația de gradul cinci l-a făcut pe Galois să dea naștere „supremei arte a abstracției matematice" – teoria grupurilor.

Jocul întâlnirilor

Deși nu a fost inventată cu acest grandios scop în minte, teoria grupurilor a reieșit a fi limba „oficială" a simetriilor. Rolul proeminent pe care-l joacă permutările în teoria grupurilor poate părea, la prima privire, oarecum surprinzător. La urma urmelor, deși suntem pe deplin conștienți de simetrii, permutările nu ne izbesc ca fiind la fel de bătătoare la ochi în viața noastră de zi cu zi. Totuși permutările se ivesc uneori, deși pe furiș, chiar și în cele mai neașteptate locuri.

Să luăm în considerare o problemă importantă pentru toată lumea, a găsirii unui partener de căsnicie[12]. Tot avansând de la o întâlnire întâmplătoare la următoarea, fiecare caută un adevărat suflet geamăn. Dar cum știe căutătorul dacă ea sau el este acela? Se poate (ca în filme) ca, atunci când dați cu ochii de o anumită persoană, să știți imediat că, în întreaga lume, nu mai există nimeni altcineva pentru voi? Sau, pentru a utiliza cuvintele unuia dintre personajele din filmul *Serendipity*, când veți înceta să căutați pe Dl/Dna Chiar-ce-mi-trebuie și să vă mulțumiți cu Dl/Dna Suficient-de-bun(ă)-pentru-moment? Pentru a trata mai ușor această problemă de viață, e indicat să facem câteva ipoteze simplificatoare. Să presupunem că o persoană (fie ea de sex feminin sau masculin) întâlnește la momentul potrivit pentru așa ceva patru potențiali parteneri (voi discuta mai târziu situații implicând un număr diferit de candidați). Să mai presupunem și că, dacă ar putea să-i examineze pe toți cei patru potențiali parteneri, respectiva persoană ar fi în stare să-i clasifice de la cel mai neadecvat (notat cu 1) până la cel mai convenabil (notat cu 4), fără ca doi dintre ei să aibă exact același rang. De obicei, șansa nu îngăduie luxul de a-i întâlni simultan pe toți cei patru parteneri. Mai mult decât atât, eticheta socială și decența ne interzic să ne întoarcem la un candidat respins anterior. Ca atare, valurile vieții îi poartă pe bărbați și pe femei printr-o serie de întâlniri ce survin în ordine aleatorie. Drept consecință, pentru patru parteneri potențiali, fiecare din următoarele $4! = 24$ permutări ale ordinii întâlnirilor are aceeași probabilitate:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Secvența 3142, spre exemplu, înseamnă că se întâlnește prima dată cu un candidat care merită nota 3 (bună, dar nu maximă), a doua oară – cu cel mai neadecvat dintre ei, a treia oară – cu cel mai potrivit, iar a patra oară – cu unul de nota 2 (proastă, dar nu minimă). În acest caz, așteptarea ca Dl/Dna Chiarce-mi-trebuie să se arate ca ultim candidat, nu ar da cu certitudine rezultatul cel mai dorit. Într-adevăr, un proces prea tergiversat vă poate recompensa nesatisfăcător eforturile. Așadar, ce ar trebui să facă tânăra (sau nu chiar atât de tânăra) persoană? Sau, mai specific, cum pot vânătorii de soți (soții) să-și maximizeze șansele de a găsi cel mai bun partener?

Primul lucru de care trebuie să ne dăm seama este că există o strategie generală pentru abordarea unor astfel de probleme (clar simplificate). Dacă sunt 4 potențiali parteneri, ideea este de a alege un număr, să-l numim k, cuprins între 1 și 4. Apoi, după ce vom fi întâlnit și cercetat $k - 1$ potențiali parteneri, să optăm pentru primul care este mai bun decât toți ceilalți (sau, dacă nici unul nu este, să-l alegem pe ultimul). Spre exemplu, pentru $k = 2$, ideea ar fi de a ne uita cu atenție la primul candidat ($k - 1 = 1$) și de a-l alege apoi pe cel dintâi partener potențial care este mai bun decât cel deja testat (nu uitați de presupunerea că nu se revine la un partener potențial anterior). Logica acestei strategii este evidentă – ea se folosește, pe de o parte, de informația deja acumulată, pe de alta, de faptul că viitorul este necunoscut. Strategia generală nu vă spune, totuși, ce valoare să alegeți pentru k. Pentru a ne decide asupra ei, trebuie să găsim care valoare a lui k dă cea mai mare probabilitate de a alege cel mai bun candidat (notat cu 4). Pentru $k = 1$ ($k - 1 = 0$), spre exemplu, primul candidat este cel care

sfârșește prin a fi ales. Pentru ca această alegere să fie cea mai bună, căutătorul se bazează pe cele șase permutări ale ordinii întâlnirilor în care 4 apare primul: 4321, 4312, 4231, 4213, 4132, 4123. Clar, probabilitatea de a nimeri una dintre aceste șase permutări din cele douăzeci și patru de posibilități existente este de unu din patru. Acest lucru e lesne de înțeles – căutătorul de partener nu l-a întâlnit încă pe nici unul dintre candidați și există o șansă din patru de a-l găsi pe cel mai bun în acest prim rendez-vous. Același lucru este adevărat pentru $k = 4$. În acest caz ($k - 1 = 3$), se pariază pe șansa ca cel de-al patrulea și ultim candidat să fie mai bun decât oricare dintre precedenții trei. Situația corespunde permutărilor 3214, 3124, 2314, 2134, 1324, 1234, iar șansa ca ordinea întâlnirilor să se producă într-una dintre aceste șase modalități este tot una din patru. Pentru $k = 3$ ($k - 1 = 2$), căutătorul de soț (soție) întâlnește doi dintre partenerii potențiali, apoi îl alege pe primul care vine după ei și este mai bun decât amândoi. Permutările ce vor rezulta pentru cea mai bună alegere (notată cu 4) sunt în acest caz: 3241, 3214, 3142, 3124, 2341, 2314, 2143, 1342, 1324, 1243. Spre exemplu, dacă ordinea întâlnirilor e 3241, căutătorul îi vede mai întâi pe candidații 3 și 2, apoi, fiindcă numărul 4 este mai bun decât fiecare dintre cei doi, numărul 4 va fi cel ales. Dacă ordinea este 3214, cel de-al treilea candidat (notat cu 1) nu este mai bun decât primii doi, și de aceea căutarea continuă și conduce la numărul 4. Lista de mai sus (pentru $k = 3$) arată că, în acest caz, există zece permutări care conduc la cea mai bună alegere. Șansele de succes sunt, de aceea, de 10 : 24 sau de circa 42%. În sfârșit, pentru $k = 2$ ($k - 1 = 1$), opțiunea va fi pentru cel dintâi candidat care este mai bun decât primul văzut. Puteți verifica faptul că, în acest caz, permutările având drept rezultat „pescuirea cu plasa“ a numărului 4 sunt: 3421, 3412, 3241, 3214, 3142, 3124, 2431, 2413, 2143, 1432, 1423. Spre exemplu, dacă ordinea este 3412, candidatul al doilea este deja mai bun decât primul, astfel încât acest candidat ar fi selectat. Pe de altă parte, dacă ordinea este 3214, căutătorul îi respinge pe candidații cunoscuți la întâlnirile a doua și a treia, fiindcă ei nu sunt mai buni decât primul, și are de așteptat ultimul partener potențial

pentru a-l găsi pe cel mai bun. Deoarece $k = 2$ oferă rezultatul dorit în 11 dintre cele 24 de ocazii sau o probabilitate de succes de circa 46%, aceasta este cea mai bună strategie de adoptat. Un calcul similar arată că, pentru $k = 3$, cele mai mari șanse se obțin dacă numărul de parteneri potențiali este de 5, 6, 7 sau 8. Dacă numărul de soții/soți potențiali(e) este de 9 sau 10, vă veți maximiza șansele cu $k = 4$.

Viața este, firește, mult mai complexă decât acest model suprasimplificat, mai ales dacă e vorba de iubire adevărată. Alegerea unui partener este o treabă mult prea serioasă pentru a fi redusă la simpla examinare a permutărilor. Cu toate acestea, apariția permutărilor în situațiile cele mai neașteptate este reală. Strategia generală schițată mai sus, fiindcă veni vorba, ar putea fi aplicată la multe alte circumstanțe (în special mai puțin critice), de la alegerea unei mașini de mâna a doua până la găsirea unui bun dentist de familie. Dacă numărul opțiunilor potențiale este foarte mare (să spunem, mai mare de treizeci), se poate demonstra matematic că „regula lui 37%“ produce cele mai bune șanse de succes. Adică, examinăm 37% din posibilități, apoi alegem mașina, restaurantul sau medicul de familie care este mai bun(ă) decât tot ce am văzut mai înainte. (În cazul în care cititorii cu înclinații mai mari spre matematică se întreabă de unde vine un atât de straniu număr, ca acest 37%, pot spune că el este aproximativ egal cu $1 : e$, unde e este baza logaritmilor naturali.)

Împinse, nu amestecate

Găsirea dragostei vieții cu ajutorul matematicii nu este singurul proces în care permutările sunt împinse în lumina rampei. Loteriile oferă, de obicei, asemenea situații, cazul cel mai dramatic fiind ilustrat de loteria recrutărilor din 1970, de pe vremea războiului din Vietnam.

Pe 26 noiembrie 1969, președintele Richard Nixon a semnat un ordin care instruia Serviciul Selectiv să stabilească un model aleatoriu de selecție pentru înrolare. Ordinul stipula că loteria

va fi bazată pe datele de naștere, dar nu furniza instrucțiuni specifice cu privire la metoda precisă de extragere a datelor.

Acesta nu era primul caz din istorie când o recrutare se baza pe un anume fel de loterie. Povestea biblică a judecătorului Ghedeon[13] este deosebit de interesantă. Dumnezeu i-a spus mai întâi lui Ghedeon: „E prea mult popor cu tine; nu voi putea Eu să dau pe Madian în mâinile lor, ca să nu se mândrească Israel înaintea mea și să nu zică: Mâna mea m-a izbăvit! De aceea, grăiește în auzul poporului și zi: Cine este fricos și se teme, acela să se întoarcă și să se ducă înapoi din Muntele Galaad." Atunci Ghedeon a trimis acasă douăzeci și două de mii de oameni, rămânând cu zece mii.

În a doua etapă a „loteriei", Dumnezeu i-a impus lui Ghedeon un al doilea criteriu de selecție. El i-a cerut lui Ghedeon să-și ducă oamenii la apă, pentru a bea. Apoi i-a spus să-i aleagă numai acei trei sute care vor lipăi apa „cu limba din pumni" și să le dea drumul celorlalți, „care vor îngenunchea pentru a bea apă" direct, „așa cum lipăie câinele". E clar că „loteria" lui Ghedeon era departe de a fi o selecție aleatorie – nu erau tratate în mod egal toate permutările posibile ale grupului de candidați. Au fost sugerate numeroase interpretări ale alegerii acestui al doilea criteriu. Cea mai simplă este aceea că ideea avea drept scop selectarea unui număr mic de oameni, spre a amplifica impresia miraculoasei victorii. Explicații mai elaborate leagă îngenuncherea de practici utilizate în cultul altor divinități sau de utilizarea mâinilor (în loc de a bea direct din râu) pentru a demonstra cumpătarea, nu lăcomia.

Destul de ciudat, deși organizată mii de ani mai târziu, loteria de recrutare din 1970[14] a avut și ea probleme din cauza caracterului aleatoriu.

Procedura în sine era suficient de simplă. Oficialii au introdus în capsule bucățele de hârtie pliate, cu cele 366 de zile ale unui an (inclusiv 29 februarie). Pe 1 decembrie 1969, capsulele au fost extrase, una câte una, dintr-un bol. Fiecărui bărbat născut între 1944 și 1948 îi era atribuit un număr de recrutare corespunzător ordinii în care ieșea data sa de naștere. Spre exemplu, prima dată extrasă a fost 14 septembrie, tuturor bărbaților

cu această dată de naștere atribuindu-li-se numărul 1. Bărbaților născuți pe 8 iunie (ultima capsulă extrasă) li s-a atribuit numărul 366. În mod clar, fiecare extragere reprezintă o permutare a celor 366 de zile. Cu cât acest număr era mai mic, cu atât mai mari erau șansele ca acel bărbat să fie efectiv recrutat. Tabelul de mai jos arată numerele medii obținute pe lună la loteria din 1970.

LUNA	NUMĂR MEDIU	LUNA	NUMĂR MEDIU
ianuarie	201	iulie	182
februarie	203	august	174
martie	226	septembrie	157
aprilie	204	octombrie	183
mai	208	noiembrie	149
iunie	196	decembrie	122

Nu este nevoie să fii un statistician experimentat pentru a observa tendința clară a acestor numere. Dacă cele medii pentru lunile ianuarie–mai rămân destul de constante, există un marcat și aproape staționar declin al celor corespunzătoare lunilor iunie–decembrie. Noiembrie și decembrie, în special, aveau numere medii considerabil mai mici decât acelea ale lunilor ianuarie–mai. Consecințele erau tulburătoare – bărbații născuți spre sfârșitul anului aveau șanse semnificativ mai mari de a fi recrutați într-un război greu.

În cazul unei distribuții cu adevărat aleatorii, fiecare dintre posibilele ordonări ale datelor are o probabilitate egală de unu la 366 (!) – numărul de permutări posibile –, și ne-am aștepta ca numărul mediu pentru diferitele luni să fie aproximativ același, în jur de 183 sau 184. În loc de aceasta, datele arată că fiecare dintre primele șase luni avea un număr mediu mai mare, în vreme ce fiecare dintre ultimele șase luni avea un număr mediu mai mic. Statisticienii puteau demonstra că probabilitatea de apariție într-un proces de selecție cu adevărat aleatoriu a unei configurații ca cea prezentată în tabel era mai mică de 1 la 50 000. Cum s-a întâmplat să apară tocmai aceasta?

Descrierea procedurii prin care s-a efectuat extragerea furnizează câteva indicații importante:

> Oamenii au numărat 31 de capsule și au introdus în ele bucăți de hârtie cu zilele lunii ianuarie. Capsulele lui ianuarie au fost apoi puse într-o mare ladă cubică de lemn și împinse lateral cu un perete despărțitor de carton, lăsând goală o parte din ladă. Au urmat cele 29 de capsule corespunzătoare lui februarie, care au fost aruncate în porțiunea goală a lăzii, renumărate și trase cu despărțitorul înspre capsulele lunii ianuarie, ele intercalându-se cu acestea. Deci, conform căpitanului Pascoe [șef al informațiilor publice din cadrul Serviciului Selectiv], capsulele din ianuarie și februarie erau amestecate temeinic. Același procedeu a fost aplicat cu fiecare lună următoare – capsulele erau numărate în zona goală a lăzii, apoi împinse cu separatorul între capsulele lunilor precedente. Deci, capsulele din ianuarie erau amestecate cu alte capsule de 11 ori, capsulele din februarie, de 10 ori și așa mai departe, capsulele din noiembrie fiind amestecate cu celelalte numai de două ori, iar cele din decembrie numai o dată… În văzul publicului, capsulele au fost lăsate să cadă din lada opacă în bolul adânc de șaizeci de centimetri. Odată ajunse în bol, capsulele nu erau agitate… Persoanele care le extrăgeau… în general luau unele de deasupra, deși din când în când își mai întindeau mâinile și până la mijlocul sau la fundul bolului.

Această relatare detaliată lasă puțină îndoială asupra concluziei că insuficienta amestecare, rezultată din punerea capsulelor lună după lună, era vinovată de riscul nealeatoriu creat. Drept urmare a criticilor publice, procedura a fost corectată la loteria de recrutare din 1971. Desigur că, în practică, un caracter aleatoriu este mai dificil de obținut decât s-ar crede. Să luăm, spre exemplu, cazul datului cu banul – cel mai cinstit lucru pe care l-au inventat oamenii pentru a decide aleatoriu între două opțiuni dificile. Probabilitățile de a ieși capul sau pajura sunt egale, nu-i așa? Nu tocmai. Un studiu recent realizat de statisticienii[15] Persi Diaconis și Susan Holmes de la Universitatea Stanford, împreună cu Richard Montgomery de la Universitatea din California, Santa Cruz, arată că, din pricina aruncării imperfecte (uneori este posibil ca moneda să nu se

învârtească deloc), banul aterizează cel mai probabil pe aceeași față pe care era așezat atunci când a pornit în zbor. Diferența dintre cele două posibilități nu e mare – o monedă va ateriza așa cum a fost aruncată în circa 51% din cazuri –, dar arată că până și astfel de lucruri simple nu pot fi acceptate fără probe. Nimeni nu este mai în măsură să examineze dacă ceva este sau nu aleatoriu decât Diaconis. El este statisticianul care a demonstrat că unui jucător de cărți îi trebuie în medie nu mai puțin de șapte amestecări pentru a crea o ordine aleatorie în pachetul de cărți. Totodată, Diaconis este cunoscut și pentru că a demascat diverse fenomene „psihice". Experimentele amănunțite pe care le-a făcut cu monedele arată că nu putem niciodată lua o decizie importantă pe baza unui penny, în special, care se rotește pe cant, pe suprafața unei mese. Din cauza greutății suplimentare de pe fața capului, astfel de monede, de un penny, aterizează cu pajura în sus mult mai frecvent decât cu capul.

Oricât de importante ar fi, totuși, permutările în sine sunt departe de a constitui întreaga poveste atunci când vine vorba de teoria grupurilor – grupurile conduc în mult mai vaste domenii ale abstracției. În particular, dacă două probleme aparent distincte se caracterizează prin grupuri care sunt izomorfe unul cu altul (au aceeași structură), aceasta este o indicație serioasă că cele două probleme pot fi mai strâns legate decât am fi bănuit.

Suprema artă a abstractizării

Într-o carte intitulată *Istoria naturală a comerțului* care a apărut în 1870, John Yeats scria: „Nici o doză de raționare abstractă nu ne-ar fi condus la descoperirea proprietăților și utilizărilor fierului." Avea probabil dreptate. Și totuși, tocmai abstracția este cea care le-a dat structurilor matematice flexibilitatea lor caracteristică. Ele pot fi transferate de la o disciplină la alta și de la un mediu conceptual la altul.

Teorema lui Cayley – că orice grup, indiferent de elementele sale și de legea de compoziție căreia i se supun, este esențialmente o copie la indigo a unui (este izomorf cu un) grup de permutări – pregătește terenul pentru înțelegerea grupurilor

ca entități abstracte. Opera lui Cayley și dezvoltările inovative ce i-au urmat datorită matematicienilor Camille Jordan, Felix Klein, Walter von Dyck și ale altora au arătat că se poate începe cu orice grup, dezbrăcându-l apoi literalmente de majoritatea aspectelor sale particulare, până când nu mai rămân decât cele esențiale. Acest schelet este suficient pentru oglindirea structurii și a tuturor proprietăților importante ale grupurilor. O analogie care vine inevitabil în minte este aceea cu școala de artă a minimalismului, din secolul XX. Și acolo, scopul unor artiști precum Carl Andre, Donald Judd sau Robert Morris era de a concentra atenția asupra a ceea ce este fundamental și de a reduce forma vizuală la extrema sa simplitate. Intenția artistului conta în primul rând în aprecierea artei minimale – la fel cum contează și cea a matematicienilor –, făcând ca aceasta să fie întotdeauna mai ales de ordin intelectual, și prin urmare erudit, mai curând decât intuitiv.

Plecând de la grupurile de permutări (singurele grupuri cunoscute la acea vreme), Cayley a făcut un salt uriaș, formulându-și primele intuiții despre conceptul de grup abstract în 1854. Ca și în cazul lui Galois, originalele sale idei erau însă atât de avansate pentru vremea aceea, încât ele nu au atras deloc atenția. Ca istoric și critic cu educație matematică, Morris Kline a formulat odată această idee: „Abstracția prematură se izbește de urechi surde[16], fie că ele aparțin matematicienilor sau studenților.“ În plan intelectual, Cayley (figura 78) ar putea fi privit, de aceea, drept unul dintre cei mai direcți succesori ai lui Galois. Viața lui Cayley[17], pe de altă parte, este în puternic contrast cu aceea a ghinionistului romantic francez. Dascălii lui Arthur Cayley de la Colegiul Regal din Londra și-au dat seama imediat de neobișnuitele sale talente matematice. Când

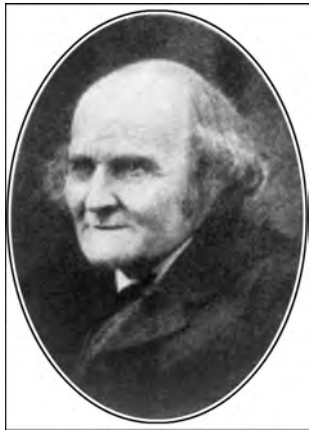


Figura 78

și-a continuat educația în Cambridge, examinatorul-șef al universității l-a clasat ca fiind „peste cel dintâi". Tânărul a trăit pe măsura așteptărilor dascălilor săi; nu împlinise vârsta de 25 de ani când semnase deja două duzini de articole matematice. Prolificitatea lui generală nu-și află perechea decât la Cauchy și la Euler. Spre deosebire de violentele urcușuri și coborâșuri (mai mult coborâșuri!) din viața lui Galois, cea a lui Cayley s-a scurs fără hurducături și a fost plină de succes. După pătrunzătoarele, deși relativ neremarcatele, articole din 1854, el și-a îndreptat atenția spre alte importante teme matematice, dar s-a întors brusc la grupuri în 1878. Printr-o serie de patru articole fecunde, a determinat teoria grupurilor să înainteze spre însuși centrul investigației matematice. Într-adevăr, datorită realizărilor lui Cayley, n-a mai fost nevoie decât de încă alți patru ani ca să apară definiții abstracte, axiomatice ale grupurilor.

Savantul matematician James R. Newman scrie în monumentala sa compilație *Lumea matematicilor* că „Teoria Grupurilor este o ramură a matematicilor în care se face ceva la ceva, apoi se compară rezultatul cu rezultatul obținut făcând același lucru la altceva sau altceva la același lucru". Un asemenea enunț buimăcitor ar putea fi considerat cu greu drept o definiție acceptabilă pentru un dicționar, dar el surprinde perfect nivelul de abstracție ce a devenit amprenta teoriei grupurilor. Permiteți-mi să utilizez câteva exemple nematematice pentru a explica acest concept.

Aceeași glumă poate fi reformulată diferit pentru contexte și circumstanțe distincte. Un fizician care dorește să-și exprime disprețul total pentru capacitățile intelectuale ale cuiva (nu că ei ar obișnui să facă așa ceva…) ar putea spune: „Este atât de dens, că lumina se curbează în jurul lui." Pe de altă parte, un om din generația Internetului ar putea utiliza, pentru același scop, imaginea „Nu cred că URL-ul său permite acces exterior". Un consilier fiscal ar spune „Dacă s-ar pune taxe pe creiere, el ar obține o rambursare", iar un chimist ar putea alege cuvintele „Are un coeficient de inteligență aproximativ egal cu temperatura camerei". Similar, enigma cu puterile lui șapte ce a apărut, la secole distanță, în papirusul Ahmes, în cartea

lui Fibonacci și în culegerea de cântecele pentru copii *Mama Gâscă* (Capitolul 3), era esențialmente aceeași, deși exprimarea diferă. În sfârșit, s-ar putea argumenta că multe basme, ca „Albă ca zăpada" și „Cenușăreasa", sunt în realitate identice, dar puse, fiecare în alt ambalaj: o mamă vitregă haină chinuiește o viitoare prințesă și un prinț chipeș o salvează pe jupânița năpăstuită. Grupurile permit o abstracție similară. O structură de grup identică poate descrie niște concepte aparent destul de disparate. Voi ilustra această putere unificatoare a grupurilor prin câteva exemple relativ simple.

Să începem cu patru operații[18] ce pot fi efectuate asupra oricărei perechi de pantaloni. Notăm cu X operația „se întorc pantalonii cu spatele în față" (nu în timp ce-i purtați!). Y desemnează „întoarcerea pantalonilor pe dos", Z spune că „se întorc pantalonii pe dos și cu spatele în față", iar I reprezintă transformarea identică, însemnând că nu se face nimic. Compunerea a două operații (notată cu „$\circ$") se realizează simplu, prin „urmat de". Puteți verifica lesne că aceste operații formează un grup. Mai exact, fiecare dintre operații este propriul său simetric: $X \circ X = I$ (întorcând de două ori pantalonii cu spatele în față se reajunge la poziția originală); $Y \circ Y = I$ (întorcând de două ori pantalonii pe dos, aceștia vor arăta exact ca la început), iar din combinația a oricăror două operații rezultă a treia. Spre exemplu, $Z \circ Y = X$, deoarece „se întorc pantalonii pe dos" urmat de „se întorc pantalonii pe dos și cu spatele în față" are drept rezultat „întoarcerea pantalonilor cu spatele în față". „Tabla înmulțirii" pentru acest grup ia, de aceea, următoarea formă (nu uitați că intrarea corespunzătoare rândului X și coloanei Y este $X \circ Y$, ceea ce înseamnă Y urmat de X):

$\circ$	I	X	Y	Z
I	I	X	Y	Z
X	X	I	Z	Y
Y	Y	Z	I	X
Z	Z	Y	X	I

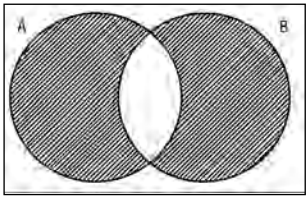


Figura 79

Să considerăm acum o interesantă operație notată de obicei cu simbolul Δ, ce poate combina (într-un anume fel) oricare două mulțimi de elemente. Spre exemplu, dacă mulțimea *A* este compusă din pisici cu cel puțin câteva pete negre pe blăniță, iar mulțimea *B*, din pisici cu cel puțin câteva pete albe pe blăniță, atunci *A* Δ *B* ne dă mulțimea pisicilor care au fie pete negre, fie albe, dar nu de ambele tipuri. Grafic, dacă *A* și *B* sunt reprezentate simbolic de ariile cercurilor din figura 79, atunci *A* Δ *B* corespunde suprafeței hașurate – Δ reunește mulțimile, excluzând suprafața de suprapunere parțială. Să luăm acum în considerare alte patru mulțimi simple. Mulțimea *X* are numai un element: un pui de găină. Mulțimea *Y* are tot unul: o vacă. Mulțimea *Z* este compusă din două elemente: o vacă și un pui de găină. *I* desemnează mulțimea vidă, care n-are absolut nici un element (rolul ei este similar cu cel jucat de zero în adunarea obișnuită). Să utilizăm acum operația Δ pentru a combina oricare două dintre aceste mulțimi. Spre exemplu, *X* Δ *Z* = *Y*, din cauză că mulțimea elementelor din *X* sau *Z*, dar nu din ambele, formează mulțimea compusă dintr-o vacă. Similar, *Y* Δ *I* = *Y*, deoarece în *Y* există o vacă ce în mod clar nu este în mulțimea vidă *I*. De aceea, mulțimea *I* joacă rolul elementului neutru. Fiecare din *X*, *Y*, *Z* este propriul său simetric, din cauză că mulțimea elementelor care nu sunt și în *X*, și în *X* este în mod clar vidă: *X* Δ *X* = *I*. Puteți verifica lesne că, asociind operația Δ mulțimilor *X*, *Y*, *Z*, *I*, obținem un grup, a cărui tablă este:

Δ	***I***	***X***	***Y***	***Z***
I	*I*	*X*	*Y*	*Z*
X	*X*	*I*	*Z*	*Y*
Y	*Y*	*Z*	*I*	*X*
Z	*Z*	*Y*	*X*	*I*

Dar aceasta este exact aceeași tablă ca cea pe care tocmai am obținut-o pentru transformările pantalonilor! Deși atât membrii grupurilor din cele două cazuri, cât și legile de compoziție sunt complet diferite, cele două grupuri au o structură identică – ele sunt izomorfe. Ar putea fi aceasta doar o consecință a faptului că cele două grupuri alese sunt oarecum particulare? Pentru a ne convinge că nu este adevărat, să considerăm un foarte obișnuit grup de rotații. Pentru a vizualiza mai ușor transformările pe care ne pregătim să le efectuăm, este bine să utilizați un paralelipiped dreptunghic cu diferite motive pe fețele lui, cum ar fi o cutie de chibrituri sau o carte groasă. Să examinăm următoarele patru operații (figura 80):

X – o jumătate de rotație în jurul axei notate cu *x*.
Y – o jumătate de rotație în jurul axei notate cu *y*.
Z – o jumătate de rotație în jurul axei notate cu *z*.
I – transformarea identică, în urma căreia paralelipipedul rămâne „așa cum este".

Câteva exerciții ne vor arăta că, efectuând, spre exemplu, *X* urmat de *Y*, obținem același rezultat ca și cum am fi efectuat operația *Z*. În același timp, dacă se aplică de două ori oricare dintre operațiile *X*, *Y*, *Z*, se reface configurația inițială (transformare identică). Tabla înmulțirii este la fel ca cele două precedente, acest grup geometric fiind deci izomorf cu grupul pantalonilor și cu grupul „pui de găină-vacă."

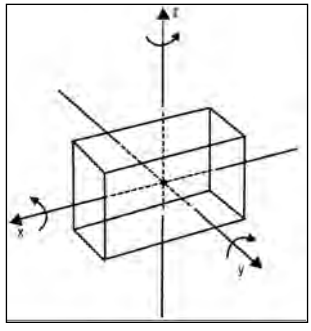


Figura 80

Poate că niciunde nu a fost aplicarea teoriei grupurilor mai surprinzătoare decât în domeniul antropologiei. Un extrem de complex sistem de rudenie-căsătorie[19] descoperit la Kariera, un trib de aborigeni australieni, i-a lăsat pe antropologi cu gura căscată. Fiecare *kariera* aparține uneia dintre următoarele patru clase sau clanuri: Banaka, Karimera, Burung și Palyeri.

Căsătoriile și asocierea descendenților la diferitele clase ascultă de următoarele reguli stricte:

1. Un *banaka* se poate căsători numai cu un *burung*.
2. Un *karimera* se poate căsători numai cu un *palyeri*.
3. Copiii unui soț *banaka* și ai unei soții *burung* sunt *palyeri*.
4. Copiii unui soț *burung* și ai unei soții *banaka* sunt *karimera*.
5. Copiii unui soț *karimera* și ai unei soții *palyeri* sunt *burung*.
6. Copiii unui soț *palyeri* și ai unei soții *karimera* sunt *banaka*.

Uimit de neobișnuitul lor sistem, în anii '40 ai secolului trecut, faimosul antropolog francez Claude Lévi-Strauss (n. 1908) i-a descris aceste reguli compatriotului său matematician André Weil (1906–1998), sperând că acesta din urmă va identifica vreun model călăuzitor. Weil era persoana perfectă căreia să i te adresezi. Pe lângă excepționalele sale abilități matematice, el era obsedat de limbi și de lingvistică. Pasiunea sa pentru sanscrită și pentru cunoașterea textelor antice, cum ar fi epopeea religioasă *Mahabharata*, i-a favorizat chiar și angajarea la Universitatea Aligarh Muslim din India. După ceva contemplație, Weil a putut, într-adevăr, să traducă întreaga schemă Kariera în limbajul teoriei grupurilor. Pentru a reproduce explicația sa, voi nota cele patru clase după cum urmează:

Banaka – A
Karimera – B
Burung – C
Palyeri – D

Regulile conjugale (1) și (2) prezentate anterior – care spun, că un A se poate căsători numai cu un C (și viceversa), iar un B se poate căsători numai cu un D – pot fi reprezentate prin următoarea corespondență de „familie", notată cu f:

$$f = \begin{pmatrix} \mathrm{ABCD} \\ \mathrm{CDAB} \end{pmatrix}$$

Observăm că, dacă această permutare se efectuează de două ori, ea reface ordinea originală – $f \circ f = I$ (unde I este identitatea: f îl duce pe A în locul lui C și pe C în locul lui A, astfel încât

aplicarea de două ori a lui f îl readuce pe A sub el însuși, făcând același lucru și pentru celelalte litere. Conform regulilor (3)–(6) ale descendenților, clasa copiilor poate fi determinată fie de strămoșii paterni (de exemplu, copilul unui bărbat *banaka* este întotdeauna un *palyeri*) sau de cei materni (de exemplu, copilul unei femei *banaka* este întotdeauna un *karimera*). Utilizând simbolurile pentru clase și notațiile p și m pentru regulile paternă, respectiv, maternă, acest lucru poate fi exprimat prin două permutări:

$$p = \begin{pmatrix} \text{ABCD} \\ \text{DCBA} \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} \text{ABCD} \\ \text{BADC} \end{pmatrix}$$

Să observăm din nou că $p \circ p = I$ și $m \circ m = I$. De asemenea, fiecare două permutări f, p, m, operând în succesiune, o produc pe cea de-a treia (de exemplu: $f \circ p = m$). Suntem acum în poziția de a construi „tabla înmulțirii" completă pentru cele patru permutări I, f, p și m:

$\circ$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{I}$	I	f	p	m
$\boldsymbol{f}$	f	I	m	p
$\boldsymbol{p}$	p	m	I	f
$\boldsymbol{m}$	m	p	f	I

Nu constatăm deci numai că regulile de rudenie-căsătorie Kariera formează un grup, dar o privire mai atentă asupra tablei înmulțirii ne convinge că acest grup este izomorf cu grupurile pantaloni/pui de găină-vacă/rotații! De fapt, am putea considera că această tablă descrie orice grup abstract în care fiecare dintre cei trei membri X, Y, Z este propriul său simetric, iar combinația oricăror doi îl dă pe al treilea.

Incidental, ne putem întreba dacă aceste complexe reguli de înrudire Kariera au vreun echivalent în civilizația apuseană. Da, au. Să ne imaginăm două familii, Smith și Jones. Membrii ambelor familii trăiesc în New York și în Los Angeles. Pot fi

atunci definite patru clase: membrii familiei Smith ce trăiesc în New York; membrii familiei Smith ce trăiesc în Los Angeles; membrii familiei Jones ce trăiesc în New York; membrii familiei Jones ce trăiesc în Los Angeles. Regulile ar putea fi formulate după cum urmează: un Smith se poate căsători numai cu un Jones (și viceversa), iar un locuitor al New Yorkului se poate căsători numai cu unul din Los Angeles (și viceversa). Copiii trăiesc în locuința mamei, dar adoptă numele de familie al tatălui. Aceste reguli de înrudire (evident, născocite) produc exact aceeași structură ca acelea ale tribului Kariera.

În mod clar, nimeni nu-și imaginează că această populație ar fi cunoscut teoria grupurilor. Este posibil ca descrierea pe baza acestei teorii a regulilor aplicate de ea în materie de căsătorie să nici nu fie în întregime necesară pentru cercetarea antropologică. Dar o analiză de acest tip a regulilor sociale poate dezvălui structuri subiacente care sunt, altminteri, dificil de recunoscut sau rămân chiar complet ignorate. „Curățarea până la os" a grupurilor, indiferent de domeniul în care apar ele, este analogă, din mai multe puncte de vedere, cu analiza structurilor diferitelor limbi. Bunăoară, determinarea interconexiunilor dintre limbile indo-europene a fost realizată printr-un proces similar. Extinsele analize ale lui Claude Lévi-Strauss[20] din domeniul antropologiei sociale, așa cum sunt ele exprimate în *Structuri elementare de înrudire*, sunt, de aceea, recunoscute în general drept forța motrice din spatele structuralismului modern – căutarea unităților subiacente și a regulilor ce guvernează modul în care sunt ele puse laolaltă.

Structuralismul și-a derivat principiile organizatorice și s-a inspirat din opera lingvistului elvețian Ferdinand de Saussure (1857–1913). Saussure a abandonat metoda tradițională de abordare a limbilor, bazată în primul rând pe studii istorice și filologice, în favoarea unei analize structurale. Un structuralist care examinează un aeroplan construit din piese de Lego nici nu se va sinchisi dacă modelul poate realmente zbura. Asemenea unui cercetător al teoriei grupurilor, el va recunoaște că există diferite tipuri de blocuri constructive și că aceste unități de bază sunt conectate între ele după anumite reguli. În

lingvistică, unitățile de bază ar putea fi fonemele, adică cele mai mici unități sonore ale limbii (din care există 31 în engleză), iar regulile vor fi date de gramatica în conformitate cu care pot fi ordonate cuvintele. Fapt este că, utilizând doar un set limitat de reguli gramaticale și o mulțime finită de foneme sau termeni, oamenii au fost în stare să producă lucrări impresionante, cum ar fi piesele de teatru ale lui Shakespeare, *Divina Comedie* a lui Dante și *Encyclopedia Britannica*. Chiar și copiii mici, care abia încep să meargă, pot pronunța întregi fraze, pe care nimeni nu le-a mai exprimat vreodată. Atât uimitorul lor ritm de învățare a limbilor, cât și similitudinile proceselor de asimilare și erorilor caracteristice ale tuturor copiilor de pe glob au motivat ideea unei gramatici universale[21]. Exact așa cum principiile teoriei grupurilor stau la baza tuturor simetriilor, teoria gramaticii universale postulează că toate limbile au principii gramaticale subiacente, care sunt înnăscute la toate ființele umane. Într-un anumit sens, gramatica universală nu este o gramatică propriu-zisă, ci o stare inițială a facultății vorbirii, pe care o posedă toți oamenii. De remarcat că asta nu înseamnă că toate limbile[22] au aceeași gramatică, ci doar că există niște reguli de bază, comune și invariabile. Idei de acest tip, parțial derivate din structuralism, au fost aplicate atât în teoria lingvistică, cât și în psihologia cognitivă de un influent cercetător de la MIT, Noam Chomsky. În Italia, romancierul și filozoful Umberto Eco[23] este și el cunoscut pentru detaliatele sale analize structuraliste din domeniul interpretării semnelor (semioticii), în contexte sociale și literare.

Date fiind paralelele dintre teoria grupurilor și lingvistică, nu trebuie să ne surprindă faptul că, exact în perioada când Saussure revoluționa lingvistica, matematicianul norvegian Axel Thue (1863–1922) introducea conceptul de limbaj formal – un set de cuvinte (sau de șiruri de caractere compuse dintr-un alfabet oarecare) ce poate fi descris printr-o anumită gramatică formală (un set de reguli precis definite). Un exemplu foarte simplu de limbaj formal ar putea fi dat de setul de șiruri compuse din literele *g* și *l*. „Gramatica“ ar putea fi definită, spre exemplu, prin regulile:

1. Se începe cu *g*.
2. De fiecare dată când se întâlnește litera *g* într-un cuvânt, se înlocuiește cu *gl*.
3. De fiecare dată când se întâlnește litera *l* într-un cuvânt, se înlocuiește cu *lg*.

Putem verifica ușor că acest limbaj va include grupări de litere precum *g, gl, gllg, gllglggl* și așa mai departe. Limbajele formale joacă un rol important în informatică și în teoria complexității algoritmilor (care se ocupă cu complexitatea intrinsecă a instrucțiunilor date unui sistem de calcul). Faptul că noțiunile introduse de Thue amintesc de elementele și definițiile teoriei grupurilor nu este întâmplător. Cele două tematici sunt intim legate între ele, în special prin intermediul importantei *probleme a cuvântului*: Să se decidă dacă, utilizând înlocuiri permise de gramatică, orice două cuvinte pot fi transformate unul în altul.

La ce concluzie ne conduc toate aceste exemple? Grupurile pot atinge nivelul de abstractizare pe care-l asociem, în mod normal, numai cu numerele obișnuite. Dacă vorbim despre șapte samurai, șapte ani buni, șapte zile ale săptămânii, șapte neveste pentru șapte frați sau șapte politicieni (de fapt, nu sunt sigur dacă cineva vrea să vorbească despre aceștia din urmă), toate sunt manifestări ale aceleiași entități abstracte – numărul șapte. Similar, cele patru grupuri pe care le-am întâlnit anterior (transformările pantalonilor, Kariera și așa mai departe) sunt, toate, realizări particulare ale unuia și aceluiași grup abstract. Imprevizibil, constituind un grup de permutări, regulile Kariera oferă o altă manifestare a teoremei lui Cayley – există, într-adevăr, un grup de permutări care este identic din punct de vedere structural cu celelalte trei grupuri.

Matematicienii se referă de obicei la grupurile care sunt izomorfe unul cu altul ca și cum ar fi un singur grup. Grupul particular realizat de pantaloni și de regulile Kariera se numește *cvadrigrupul lui Klein*, după matematicianul german Felix Christian Klein (1849–1925). Klein are meritul de a fi realizat un progres major în aplicarea teoriei grupurilor – recunoaș-

terea faptului că geometria, simetria și teoria grupurilor sunt inevitabil legate între ele. Klein a arătat că, în multe privințe, geometria *este* chiar teoria grupurilor. Această afirmație surprinzătoare a produs o ruptură atât de impresionantă de modul tradițional de a vedea geometria, încât merită o expunere mai detaliată.

Ce este geometria?

Cam prin anul 300 î.Cr., matematicianul grec Euclid din Alexandria a publicat ceea ce avea să devină cel mai bine vândut manual de matematică din toate timpurile – *Elementele*. Prin acest op de treisprezece volume, el a pus bazele geometriei euclidiene pe care o învățăm la școală, iar până în secolul al XIX-lea aceasta a fost singura geometrie cunoscută. Euclid a încercat să construiască întreaga teorie a geometriei pe o bază logică bine definită. Ca atare, a pornit cu numai cinci postulate sau *axiome*, considerate drept adevărate, și a căutat să demonstreze toate celelalte propoziții pe baza lor, prin deducții logice. Axiomele sunt asemenea regulilor unui joc, al căror „adevăr" nu se discută. Dacă dorim să schimbăm axiomele, nu facem decât să jucăm alt joc. Spre exemplu, prima axiomă spune: „Între oricare două puncte se poate trage o linie dreaptă." Geometria euclidiană descrie propoziții care sunt deduse a fi adevărate dacă această axiomă și altele sunt adevărate. Axiomele a doua, a treia și a patra erau la fel de concise, dar cea de a cincea era diferită, mai complicată ca formulare, și drept urmare a avut o istorie mai complicată. Probabil că nici Euclid n-a fost pe deplin mulțumit cu cea de-a cincea axiomă a sa, căci a încercat să o evite cât a putut – demonstrațiile primelor 28 de propoziții din *Elementele* nu fac uz de axioma a cincea. Versiunea foarte citată astăzi a acestei axiome, cunoscută sub denumirea de *axioma paralelelor*, îi aparține matematicianului scoțian John Playfair (1748–1819), deși ea a apărut mai întâi în comentariile matematicianului grec Proclus, în secolul al V-lea. Ea spune: „Date fiind o linie și un punct care nu este pe linie, este posibil să se traseze numai o linie paralelă cu linia dată prin acel punct."

Peste secole, mai mulți geometri nemulțumiți au încercat fără succes să demonstreze axioma a cincea folosindu-se de primele patru, într-un efort de a formula o geometrie mai economică. Acestea n-au fost eșecuri complete, totuși, fiindcă au furnizat noi elemente de înțelegere a problemei. Mai exact, încercările lor au dus la înțelegerea faptului că erau posibile multe alte formulări alternative ale axiomei a cincea, toate echivalente între ele. În cele din urmă, această întortocheată cale a deschis drumul pentru dezvoltarea unor noi geometrii, neeuclidiene.

Cel dintâi care a făcut un progres semnificativ în direcția geometriilor neeuclidiene, deși nu l-a definitivat, a fost iezuitul Giovanni Girolamo Saccheri[24] (1667–1733). Într-o lucrare destul de remarcabilă pentru vremea sa, *Euclides ab omni naervo vindicatus* (*Euclid eliberat de toate cusururile*), Saccheri examina o interesantă întrebare, de genul „ce se-ntâmplă dacă?" – ce se întâmplă dacă suma unghiurilor unui triunghi nu este egală cu 180° (așa cum ne învață geometria euclidiană), ci este mai mare sau mai mică? Mai putem inventa oare o geometrie logică suficient de corectă, care să nu se contrazică pe ea însăși? Cam un secol mai târziu, Legendre a preluat problema de acolo unde o lăsase Saccheri, arătând în faimoasa sa carte de geometrie (cea studiată de Galois) că afirmația potrivit căreia suma unghiurilor este egală cu 180° e complet echivalentă cu axioma a cincea a lui Euclid (adică o putem presupune adevărată pe oricare dintre cele două și o demonstrăm pe cealaltă). Atât Saccheri, cât și Legendre n-au izbutit totuși să priceapă toate implicațiile acestor posibilități alternative și au sfârșit prin a se împotmoli în contradicții incorecte. Dar nu-i mai puțin adevărat că atât lucrările lor, cât și cercetarea complementară a matematicianului alsacian Johann Heinrich Lambert (1728–1777) au ajutat la concentrarea atenției asupra „postulatului paralelelor", pe care în 1767 matematicianul francez Jean d'Alembert îl numea „scandalul geometriei elementare". Patru matematicieni din trei țări – Gauss, Bolyai, Lobacevski și Riemann – sunt cei care au reușit, în cele din urmă, să formuleze corect primele geometrii neeuclidiene. De fapt, în aceste noi geometrii, postulatul al cincilea este înlocuit[25] cu una dintre negațiile sale: „Printr-un punct neaflat pe

o linie, există fie mai multe linii paralele cu linia dată, fie nu există nici una.“ Sau echivalent, suma unghiurilor dintr-un triunghi este fie mai mică de 180°, fie mai mare de 180°.

Nu e greu de vizualizat cum pot fi realizate astfel de geometrii. Să examinăm cele trei suprafețe din figura 81. Geometria euclidiană este geometria spațiului plat, de tipul celui întâlnit pe suprafața unei mese. În această geometrie, paralelele (presupuse a fi infinite) nu se întâlnesc niciodată, iar unghiurile oricărui triunghi au întotdeauna suma egală cu 180°. Pe suprafața unei sfere, cum ar fi cea a pământului, suma unghiurilor unui triunghi depășește 180° (în cazul particular arătat în figură suma este de 270°). Geometria în formă de șa este cunoscută astăzi sub denumirea de *geometrie hiperbolică*. János Bolyai (1802–1860)[26], un tânăr matematician maghiar, a elaborat multe dintre aspectele acestei geometrii în 1824. Într-o scrisoare adresată tatălui său, matematicianul Farkas Bolyai, János nu-și putea stăpâni bucuria pricinuită de descoperire: „Am creat o stranie lume nouă, din nimic.“ În 1831, exuberantul János a finalizat o descriere detaliată a noii sale geometrii. Fiindcă tatăl lui era gata să publice un masiv tratat (*Tentamen*) despre fundamentele geometriei, algebrei și analizei, János și-a pregătit manuscrisul în formatul unei anexe la cartea tatălui. O scrisoare de la Gauss, căruia lucrarea îi fusese trimisă pentru recenzare, a domolit rapid entuziasmul lui Bolyai. Gauss și-a exprimat mai întâi admirația pentru ideile din studiu, dar n-a întârziat să-i precizeze că „întregul conținut al lucrării… coincide aproape exact cu propriile mele meditații, care mi-au ocupat gândurile în ultimii treizeci sau treizeci și cinci de ani.“ Deși nu încape îndoială că Gauss anticipase, într-adevăr, multe

Figura 81

dintre rezultatele lui Bolyai, dacă nu chiar pe toate el nu le publicase niciodată (după cât se pare, de teamă că o geometrie atât de radical nouă va fi privită ca o erezie filozofică). Realizarea faptului că nu el era inițiatorul ideii a avut un efect devastator asupra lui Bolyai. El s-a umplut de amărăciune, iar lucrărilor sale matematice ulterioare le lipsește calitatea imaginativă a geometriei hiperbolice.

Necunoscut nici de Bolyai, nici de Gauss, matematicianul rus Nikolai Ivanovici Lobacevski[27] (1792–1856) a publicat în 1829 un întreg tratat, anunțând geometria hiperbolică drept o alternativă a geometriei euclidiene. Deoarece lucrarea a apărut în obscurul *Mesager al Kazanului*, ea a trecut însă aproape în întregime neobservată până în 1837, când o versiune franceză apărea în *Revista Crelle*. În 1868, italianul Eugenio Beltrami[28] (1835–1900) a pus, în sfârșit, geometria Bolyai-Lobacevski pe picior de egalitate cu geometria euclidiană.

Georg Friedrich Bernhard Riemann[29] (1826–1866), strălucitul student al lui Gauss, este cel dintâi care a discutat *geometria eliptică*, așa cum o întâlnim în forma sa cea mai simplă pe suprafața unei sfere, într-o prelegere clasică ținută pe 10 iunie 1854. Pentru mulți matematicieni, studiul lui Riemann se află în fruntea listei celor mai bune zece lucrări ale tuturor timpurilor. Una dintre diferențele-cheie dintre geometria eliptică și cea euclidiană este aceea că pe suprafața unei sfere cea mai scurtă distanță dintre două puncte nu este o linie dreaptă. În loc de aceasta, ea este un segment dintr-un cerc mare, al cărui centru coincide cu centrul sferei (așa cum este cazul ecuatorului sau meridianelor terestre). Cursele aeriene de la Los Angeles la Londra profită de acest fapt și nu urmează o traiectorie dreaptă pe hartă, ci una de forma unui arc de cerc, ce trece pe la nord de Los Angeles (figura 82). Puteți verifica ușor că oricare două cercuri mari se întâlnesc în două puncte

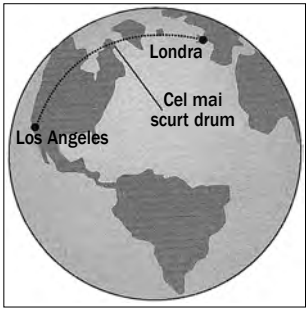


Figura 82

diametral opuse (de exemplu, două meridiane, care sunt paralele la ecuator, se întâlnesc la cei doi poli). Ca urmare, în această geometrie nu există linii paralele. Riemann a dus abstractele concepte neeuclidiene mult mai departe și a introdus spații curbate în trei și chiar mai multe dimensiuni. În unele dintre acestea, natura geometriei se poate schimba din loc în loc, fiind eliptică în unele regiuni și hiperbolică în altele. O diferență crucială între lucrarea lui Riemann și cercetările tuturor precedesorilor săi (inclusiv ale marelui Gauss) consta în schimbarea de perspectivă asupra subiectului studiat. Atunci când analiza o suprafață bidimensională curbată, Gauss o privea de parcă ar fi fost suprafața unui glob – dintr-un punct de vedere exterior, tridimensional. Riemann, pe de altă parte, examina suprafața aceluiași glob din perspectiva unui punct pictat pe acea suprafață.

Geometriile neeuclidiene pot părea, la prima vedere, invenții inutile, deși ingenioase, ale unor minți de matematicieni cu prea multă imaginație. Așa cum vom vedea însă în capitolul următor, în chip neașteptat, s-a dovedit că soluțiile ecuațiilor lui Einstein, care descriu structura spațiului și timpului, reclamă exact clasele de geometrii descrise mai sus. Perspectiva lui Riemann, cea care rezultă din analizarea spațiului curbat dintr-un punct al său, este fundamentul cosmologiei moderne – studiul universului ca un întreg. Dacă ne gândim un moment la ea, este absolut uimitoare. Întrebarea aparent nevinovată „Ce se-ntâmplă dacă?“, pusă de Saccheri cu privire la al cincilea postulat al lui Euclid, a condus la inventarea unor geometrii care au furnizat instrumentele de care avea nevoie Einstein pentru a explica structura cosmică. Exact așa cum teoria grupurilor, formulată de Galois, a devenit limbajul simetriilor, iar geometria neeuclidiană, limbajul cosmologilor, acest tip de „anticipare“ matematică a nevoilor fizicienilor generațiilor ulterioare s-a repetat de multe ori de-a lungul istoriei științei.

Generalizarea și abstractizarea geometriei era o dezvoltare bine-venită, dar în anii 1870 proliferarea diferitelor ei forme părea total scăpată din mână. În plus față de geometriile neeuclidiene prezentate până acum, mai exista o colecție pestriță,

compusă din *geometria proiectivă* (ce se ocupă cu proprietățile figurilor geometrice proiectate pe anumite suprafețe, ca atunci când imaginile de pe un film de celuloid sunt proiectate pe ecranul unui cinematograf), *geometria conformă* (care se ocupă cu restrângerea corpurilor într-un spațiu mai mic, cu păstrarea unghiurilor), *geometria diferențială* (studiul geometriei utilizând calculul infinitezimal) și din multe altele. Dacă, așa cum credea Platon, „Dumnezeu este geometru", care dintre aceste geometrii se bucură de aprobarea divină? Acesta a fost punctul în care Felix Klein, pe atunci în vârstă de 23 de ani (figura 83 îl arată la o vârstă mai avansată), a venit în ajutor cu o metodă bazată pe teoria grupurilor și, astfel, ordinea a început să se cristalizeze din haos.

Figura 83

Într-o prelegere fundamentală[30], intitulată „Trecere în revistă comparativă a cercetărilor recente din geometrie" și susținută în 1872 la Universitatea din Erlangen, Klein a inversat cu îndrăzneală rolurile simetriei și geometriei. Apelând la cuvintele sale: „Există transformări ale spațiului care nu schimbă deloc proprietățile geometrice ale figurilor. Prin natura lor, aceste proprietăți sunt efectiv independente de poziția ocupată în spațiu de figura considerată, de dimensiunea sa absolută și de orientarea sa." Înaintea lui Klein, matematicienii gândiseră în primul rând în termeni de obiecte geometrice, cum ar fi cercurile, triunghiurile sau solidele. În loc de aceasta, în așa-numitul său Program de la Erlangen, Klein a susținut că geometria în sine se caracterizează și se definește nu prin obiecte, ci mai curând prin grupul transformărilor care le lasă invariante. Să luăm, de exemplu, grupul mișcărilor rigide – mișcările care păstrează distanțele și unghiurile și, drept urmare, formele. Fiindcă astfel de mișcări sunt pâinea și untul geometriei euclidiene, aceasta poate fi definită drept geometria care

rămâne invariantă sub toate transformările din grupul mișcărilor rigide. Un cerc de rază dată rămâne neschimbat oricum l-am roti. Două triunghiuri care se suprapun exact (care sunt subiectul atât de multor teoreme din geometria euclidiană și o constantă sursă de dureri de cap pentru elevii de liceu) rămân congruente chiar dacă le translatăm, le rotim sau le reflectăm. Ideea radicală a lui Klein permitea însă existența unei mult mai largi varietăți de geometrii. Alte transformări, care ar putea răsuci sau întinde obiectele, ar putea defini noi geometrii. Cu alte cuvinte, conceptul unificator de bază, care reprezintă coloana vertebrală a oricărei geometrii, este *grupul de simetrii*. Deși fiecare dintre numeroasele tipuri de geometrie se poate baza pe un grup diferit de transformări, proiectul fundamental al tuturor este același. În geometria proiectivă, spre exemplu, distanțele nu sunt în mod clar invariabile. Prototipul lui King Kong, folosit pentru varianta originală a filmului cu același nume, n-avea decât 45 cm înălțime, față de imaginea sa de pe ecran, de 15 m. De aceea, geometria proiectivă se caracterizează printr-un grup de transformări de simetrie diferit de acela al geometriei euclidiene (concepte ca „hexagonal" sau „eliptic" se păstrează în proiecție). Potrivit lui Klein, ceea ce au matematicienii de făcut pentru a defini o geometrie este de a furniza un grup de transformări și de a identifica ansamblul entităților ce rămân neschimbate după aplicarea lui. Aceste idei au fost extinse ulterior[31] și înzestrate cu mult mai multă profunzime de doi giganți ai matematicii: specialistul norvegian în teoria grupurilor Sophus Lie (1842–1899) și semeața figură a matematicilor sfârșitului de secol al XIX-lea – francezul Henri Poincaré (1854–1912).

Cu inovativul Program de la Erlangen al lui Klein, cu abstracția grupurilor a lui Cayley, cu înclinația lui Lie către modul de gândire structuralist și cu matematica atotcuprinzătoare ale lui Poincaré, începuse să devină clar că simetria și teoria grupurilor asigură reazemul unei bune părți a matematicii. De fapt, pentru Poincaré, „toată matematica era o chestiune de grupuri". Domenii ce anterior au părut a fi total neconexate, cum ar fi ecuațiile algebrice, o multitudine de

geometrii, până și teoria numerelor (prin lucrările fecunde ale lui Euler și Gauss), au devenit deodată unificate printr-o structură de bază. Deși Klein era privit de către unii matematicieni (destul de aroganți) din Berlin ai timpului său drept „un șarlatan fără merite reale", el mai avea un elegant rezultat în repertoriul său. Cu o lovitură de maestru dată în domeniul teoriei grupurilor, a combinat algebra cu geometria, apoi s-a întors – credeți sau nu – la lucrarea lui Galois asupra ecuației de gradul cinci, făcând o legătură între ele și aceasta din urmă. Spectacolul nu avea, totuși, un singur actor: prusacul Leopold Kronecker[32] și francezul Charles Hermite[33] au netezit drumul către aceste profunde interconexiuni.

Întoarcerea ecuației de gradul cinci

Leopold Kronecker (1823–1891) a fost una dintre acele combinații cu adevărat rare de matematician dăruit și afacerist de succes. Neobișnuita sa capacitate de a descoperi și a ocroti imediat oameni aflați pe panta ascendentă, atât din lumea financiară, cât și din cea matematică, s-a dovedit foarte utilă și pentru promovarea propriei cariere. Unele dintre principalele sale contribuții matematice au fost aduse în teoria funcțiilor eliptice (temă pe care Abel și-a scris faimosul său studiu de 125 de pagini) și în teoria *numerelor algebrice* (numere care sunt soluții ale unor ecuații algebrice).

În 1845, unchiul lui Kronecker din partea mamei a decedat. Unchiul fusese un prosper bancher și administrator de întreprindere agricolă. Conducerea afacerilor sale era aruncată pe umerii tânărului matematician, care pe data de 14 august a acelui an tocmai trecuse de examenul oral de susținere a tezei de doctorat. Kronecker a preluat responsabilitatea cu multă energie și o intransigentă seriozitate. Deși solicitanta ocupație l-a forțat să-și petreacă următorii opt ani ca afacerist, el nu a neglijat matematica. Acolo unde alții aflați în situația sa s-ar fi putut apucat de un subiect mai ușor pentru a-și ocupa timpul liber, Kronecker și-a închinat eforturile pentru a dobândi cea

mai profundă înțelegere a teoriei lui Galois dintre toți matematicienii de pe la sfârșitul anilor 1840 (amintiți-vă că memoriile lui Galois au fost publicate de Liouville, în 1846). Rezultatul a fost un memoriu de claritatea cristalului asupra rezolvabilității ecuațiilor, apărut în 1853. În descrierea pe care o face lucrării, istoricul matematicilor E.T. Bell nu-și precupețește laudele: „Kronecker a luat aurul rafinat al predecesorilor săi, a trudit asupra lui ca un inspirat giuvaiergiu, a adăugat geme de la el și a făcut, din materialul brut anterior, o lucrare de artă fără cusur, ce poartă amprenta neîndoielnică a individualității sale artistice." Revenind complet la matematici, Kronecker și-a petrecut următorii cinci ani montând un atac direct asupra ecuației de gradul cinci. După cum vă amintiți, Abel și Galois au demonstrat că ecuația generală de gradul cinci nu putea fi rezolvată *printr-o formulă* ce implică operații simple asupra coeficienților, nu că nu putea fi rezolvată deloc. Dar metoda concretă de rezolvare rămânea evazivă. Așa cum este adesea cazul descoperirilor științifice ajunse la soroc, pe când Kronecker încerca să supună, în sfârșit, ecuația de gradul cinci, un matematician francez era și el preocupat de același lucru.

Charles Hermite (1822–1901) era cel de-al șaselea copil al lui Ferdinand Hermite și al Madeleinei Lallemand, care aveau cinci băieți și două fete. În copilăria lui Charles, fiindcă postăvăria familiei prospera, ai săi s-au mutat din Dieuze în Nancy, care era un oraș mai mare. După absolvirea unei școli din Nancy, urmată de Liceul Henri IV din Paris, Hermite a intrat la Louis-le-Grand, cam la unsprezece ani după ce Galois părăsise această instituție. Dascălul său de matematici de acolo era – ați ghicit – același Louis Richard, care fusese mentorul lui Galois. Înzestratul dascăl nu a întârziat nici de data aceasta să-și dea seama că Hermite era „un tânăr Lagrange". Dacă v-ați îndoit vreodată că istoria are obiceiul să se repete, rețineți ce vă spun acum. În vreme ce era la Louis-le-Grand, Hermite a publicat două studii matematice. Unul dintre ele era intitulat „Considerații asupra rezolvării algebrice a ecuației de gradul cinci". Foarte interesant, el demonstra că metoda lui Lagrange

de rezolvare (Capitolul 3) nu putea funcționa. Titlul și conținutul studiului au mai arătat, totuși, că cel puțin la vârsta de douăzeci de ani Hermite nu știa încă nimic de lucrările lui Abel sau ale lui Galois (nu că altcineva din lumea matematică ar mai fi știut ceva de lucrarea lui Galois la acea vreme). Pentru a mai continua puțin paralela dintre experiențele școlare ale lui Hermite și cele ale lui Galois, Hermite a încercat și el să intre la École Polytechnique. Spre deosebire de sărmanul Évariste, a trecut examenul de admitere, dar a fost clasat tocmai pe locul 68. Apoi, pentru a adăuga o insultă la injurie, după numai un an la Polytechnique, Hermite era forțat să plece din cauza unui handicap fizic – o infirmitate la piciorul drept.

Hermite s-a întors la ecuația de gradul cinci spre sfârșitul anilor 1850, iar studiul său asupra subiectului a apărut în 1858 – același an în care și Kronecker a publicat unul, cu titlu practic identic: „Asupra rezolvării ecuației generale de gradul cinci". Rezultatul lui Hermite era spectaculos. Utilizând o specie particulară de funcție eliptică, el era capabil, pentru prima oară, să rezolve ecuația generală de gradul cinci. Secole întregi de repetate asalturi își primeau, în sfârșit, răsplata.

Kronecker a făcut încă un pas înainte. Mai întâi, el a obținut practic aceeași soluție ca Hermite, dar utilizând o metodă diferită, mai în spiritul ideilor lui Galois. În al doilea rând, într-un alt articol, publicat în 1861, el a făcut săpături în motivele subiacente ale succesului metodei pe care o folosise. Cu alte cuvinte, Abel și Galois au demonstrat că ecuația generală de gradul cinci nu putea fi rezolvată printr-o formulă; Kronecker a încercat să înțeleagă de ce putea fi rezolvată prin funcții eliptice. O altă realizare a lui Kronecker a fost publicarea (în 1879) a unei versiuni mai simple, mai scurte și mai bine organizate a demonstrației lui Abel. El a mai și corectat o eroare minoră din demonstrația originală, destul de lungă (care din fericire nu avea efect asupra rezultatului). Astfel a pregătit terenul pentru asaltul decisiv al lui Felix Klein.

Filozofia pe care se baza investigația lui Klein[34] era, de fapt, destul de simplă. Mai spre începutul acestui capitol am utilizat proprietățile familiare ale grupului de simetrii ale triunghiului

echilateral și pe acelea ale grupului de permutări a trei elemente pentru a arăta că cele două grupuri sunt, în realitate, unul și același (izomorfe). Klein a răsturnat această logică. El a arătat mai întâi că două grupuri aparent disparate sunt izomorfe, apoi a încercat să priceapă care-s motivele acestei neașteptate conexiuni. Descoperirile lui Klein au fost publicate în 1884, într-un tratat masiv, cu exoticul titlu *Prelegeri asupra icosaedrului și a rezolvării ecuației de gradul cinci*. Cum sunt legate între ele cele două teme din titlu? Klein începea cu o simplă examinare a solidului denumit icosaedru (figura 84). Platon considera acest frumos corp drept unul dintre constituenții de bază ai cosmosului (celelalte fiind tetraedrul, cubul, octaedrul și dodecaedrul, toate formând *solidele platonice*). Icosaedrul are 12 vârfuri, 20 de fețe (fiecare de forma unui triunghi echilateral) și 30 de muchii (liniile unde se întâlnesc fețele). Klein a arătat mai întâi că există exact 60 de rotații ce lasă icosaedrul neschimbat. Acestea sunt (figura 84): patru rotații cu multipli de 72° în jurul liniilor ce unesc vârfuri opuse (în număr total de 24); două rotații cu 120° în jurul liniilor ce unesc centrele fețelor opuse (în număr total de 20); jumătate de întoarceri în jurul liniilor ce unesc punctele mediane ale muchiilor opuse (în număr total de 15); transformarea identică, ce-l lasă „așa cum e". Klein a arătat apoi că aceste rotații formează un grup. După aceea, el a examinat un grup particular de permutări de cinci soluții ale ecuației de gradul cinci, presupuse a exista. Mai concret, a examinat numai permutările pare (ce conțin un număr par de transpoziții). Fiindcă sunt în total $5! = 120$ de permutări a cinci elemente, există exact 60 de permutări pare (și 60 impare).

Figura 84

Apoi a venit șah-matul. Klein a demonstrat că *grupul icosaedral și grupul permutărilor sunt izomorfe*. Dar să ne amintim că demonstrația lui Galois asupra rezolvabilității ecuațiilor se baza în întregime pe clasificarea ecuațiilor în funcție de proprietățile de simetrie demonstrate la permutarea soluțiilor. Neașteptata legătură între permutări și rotațiile icosaedrale i-a permis lui Klein să țească o magnifică tapiserie, în care ecuația de gradul cinci, grupurile de rotație și funcțiile eliptice erau toate întrețesute. Exact așa cum îmbinarea tuturor pieselor unui joc de puzzle dezvăluie un întreg tablou, tot așa și interconexiunile fundamentale descoperite de Klein au procurat răspunsul definitiv la întrebarea de ce ecuația de gradul cinci putea fi rezolvată cu funcții eliptice.

Puterea unificatoare a teoriei grupurilor era atât de copleșitoare, încât la sfârșitul secolului al XIX-lea devenise clar că sfera sa de influență avea să depășească frontierele matematicii pure. Fizicienii, în special, începeau să ia aminte. În primul rând, prin teoria relativității generale a lui Einstein, geometria era recunoscută ca fiind o proprietate-cheie a universului în ansamblu. Apoi simetria era identificată drept fundamentul de unde izvorăsc în cele din urmă toate legile naturii. Aceste două simple adevăruri garantau că acea căutare a unei teorii atotcuprinzătoare a cosmosului se va transforma în mare măsură într-o căutare a grupurilor subiacente.

7
Regulile de simetrie

Natura a fost amabilă cu noi. Fiind guvernată de legi universale, nu de regulamente locale, ea ne-a dat ocazia să-i descifrăm grandiosul proiect. Spre deosebire de cum se desfășoară lucrurile în afacerile imobiliare – unde totul se reduce la localizare, localizare și iarăși localizare – nici localizarea noastră în spațiu, nici orientarea noastră în raport cu Pământul, Soarele sau stelele fixe nu face vreo diferență pentru legile naturii pe care le deducem. Dacă n-ar fi existat această simetrie a legilor naturii față de translații și rotații, experimentele științifice ar fi trebuit repetate în orice nou laborator de pe glob, pierzându-se orice speranță de a înțelege vreodată zonele îndepărtate ale universului. Lucrul acesta are implicații importante. Atunci când Newton a presupus pentru prima dată că mișcările corpurilor cerești ar putea fi descrise prin formule matematice, și mai mult decât atât, că formulele respective exprimau legi universale, reacțiile declanșate în întreaga Europă sunt lesne de înțeles. Explicația căderii merelor nu ar fi fost de ajuns pentru a pricinui atâta senzație. Mișcarea planetelor, pe de altă parte, fusese întotdeauna considerată drept neîndoielnica lucrare a mâinii călăuzitoare a lui Dumnezeu. Poetul Alexander Pope din secolul al XVIII-lea a exprimat probabil sentimentele multora atunci când a scris:

> *Natura și legile naturii*[1] *stau tainice în noapte:*
> *Și spuse Dumnezeu, Să fie Newton! Și totul fu lumină.*

Newton, el însuși un om credincios și evlavios, n-avea nici o intenție să aducă în discuție omniprezența lui Dumnezeu.

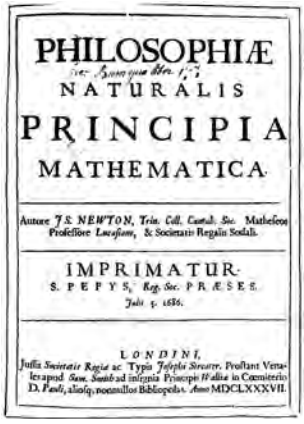

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
Auctore J.S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmeterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Figura 85

În capodopera sa științifică[2] *Principia* (figura 85 arată pagina de titlu), el scria: „Acest prea frumos sistem al Soarelui, planetelor și cometelor n-ar putea purcede decât din hotărârea și dominația unei inteligente și puternice Ființe. Iar dacă stelele fixe sunt centrele unor sisteme proprii, asemănătoare, acestea, fiind formate ca urmare a unei astfel de hotărâri, trebuie să fie toate supuse dominației Unicului." Cu toate acestea, ideea că universul este un fel de sistem mecanic a pătruns și în unele lucrări de artă contemporană, cum ar fi impresionanta pictură *Un filozof ținând o lecție pe planetariu*, a lui Joseph Wright din Derby (figura 86). Astfel s-a făcut trecerea de la universul organicist grecesc, care trata cosmosul ca pe un organism biologic, la universul mecanicist.

Figura 86

Lumea din jurul nostru pare a fi la fel de trecătoare ca și norii. Istoriile umanității, a Pământului, a Sistemului Solar, a întregii galaxii Calea Lactee și chiar a universului luat ca un tot sunt marcate de schimbări neîncetate, uneori violente, deși la scări de timp diferite. Din fericire, legile naturii sunt mai puțin efemere. Atunci când astronomii observă o galaxie care se află la un miliard de ani-lumină distanță, lumina care intră în apertura telescopului lor în acel moment era pe drum de un miliard de ani. Cu alte cuvinte, telescoapele sunt adevărate mașini ale timpului – ele dau crâmpeie de imagini din trecutul îndepărtat al universului. Pe cât putem spune, Mama Natură nu îngăduie amendamente la constituția ei – legile naturii nu s-au schimbat în nici un fel observabil, cel puțin de pe vremea când universul avea vârsta de o secundă. Dacă legile ar fi avut o existență mai efemeră, fizicienilor (dacă aceștia ar mai fi existat în asemenea condiții) le-ar fi fost foarte dificil să dezvăluie istoria cosmică.

Dimensiunile spațiu-timp

Simetria legilor naturii se extinde mult dincolo de translații și rotații. Legilor le este indiferent, spre exemplu, cât de repede sau în ce direcție ne mișcăm. Puteți observa acest fenomen în orice gară. Uneori, cu greu putem spune dacă trenul nostru se mișcă sau cel de pe linia alăturată. Doi observatori care se deplasează cu viteze constante (adică, fără schimbarea accelerației sau direcției de mișcare) vor sesiza că natura ascultă de exact aceleași legi, indiferent dacă unul țâșnește spre cer, într-o rachetă a viitorului care zboară cu 99% din viteza luminii, iar celălalt stă tolănit pe spatele unei gigantice broaște țestoase. Galileo și Newton își dăduseră seama de această importantă simetrie între observatori care se deplasează cu viteze constante, dar Einstein i-a dat o importanță enormă și o interpretare total neașteptată în teoria relativității restrânse. O parte a acestei simetrii este relativ directă. Întrebarea „Când se oprește New Yorkul la acest tren?“ poate părea suprarealistă,

dar, de fapt, este perfect legitimă chiar și în fizica newtoniană. O persoană aflată într-un tren, hotărât lucru, ar putea considera că acel tren stă pe loc în vreme ce orice altceva se mișcă. Einstein, totuși, a formulat simetria astfel încât să corespundă cu neașteptatul rezultat experimental, că viteza luminii este întotdeauna aceeași[3], indiferent de cum se mișcă sursa de lumină sau observatorul. Cu alte cuvinte, la simetria care spune că legile fizicii (inclusiv legile electromagnetismului și luminii) par a fi aceleași pentru toți observatorii care se deplasează uniform, el a adăugat o alta: *Viteza luminii este exact aceeași pentru toți observatorii.*

Constanța vitezei absolute a luminii era un aspect implicit al ecuațiilor lui Maxwell (teoria electromagnetismului), dar la prima vedere ea pare extrem de neintuitivă. De fapt, chiar ne contrariază, contrazicându-ne orice raționament logic privitor la modul de comportament al obiectelor din jur. Atunci când cineva azvârle un măr în față în timp ce conduce un automobil decapotabil (din fericire, nu mulți șoferi fac asta), viteza mărului în raport cu solul este suma dintre viteza automobilului și viteza cu care este aruncat mărul. În același mod, ne-am aștepta ca, dacă acel vehicul ar veni direct spre noi, viteza luminii emise de farurile lui să fie egală cu suma dintre viteza luminii (de circa 300 de milioane de metri pe secundă) și viteza automobilului. Einstein ne spune, totuși, iar numeroase experimente o confirmă, că *nu* este adevărat. Chiar și dacă automobilul s-ar deplasa cu incredibila viteză de 99,99% din viteza luminii, viteza măsurată a luminii emise de farurile lui ar rămâne neschimbată, de 300 de milioane de metri pe secundă. Mai mult decât atât, același lucru ar fi adevărat dacă ar fi să măsurăm viteza luminii emise de stopurile automobilului, pe când acesta s-ar deplasa în marșarier, cu o viteză apropiată de cea a luminii. Înainte de a pătrunde mai adânc în implicațiile acestei cruciale descoperiri, să examinăm pentru un moment ce s-ar fi întâmplat dacă vitezele surselor s-ar fi adunat la (sau scăzut din) viteza luminii. Figura 87 arată niște piste încrucișate dintr-un aeroport. Avionul călătorind spre sud tocmai a aterizat în mare viteză. Exact când dă să intre în intersecție, pilotul observă un transportor

de bagaje apropiindu-se dinspre vest. Pilotul cotește rapid pentru a evita coliziunea. Să presupunem acum că un observator privește întregul incident din ramificația de sud a intersecției. Pentru a face problema și mai clară, să presupunem că avionul ce aterizează se mișcă foarte aproape de viteza luminii. Dacă viteza luminii n-ar fi constantă, observatorul ar vedea lumina reflectată de avion mișcându-se către el la aproape dublul vitezei luminii (suma dintre viteza avionului și cea a luminii). Lumina reflectată de lentul transportor de bagaje, pe de altă parte, s-ar apropia de observator la viteza luminii (fiindcă este reflectată perpendicular pe direcția de mișcare). Drept consecință, lumina trimisă de avion ar ajunge la observator semnificativ mai devreme decât lumina de la transportor. Observatorul ar vedea avionul cotind violent fără nici un fel de motiv aparent. Deci luarea în considerare a unei viteze constante a luminii pentru toți observatorii elimină astfel de paradoxuri, în care efectele precedă cauzele.

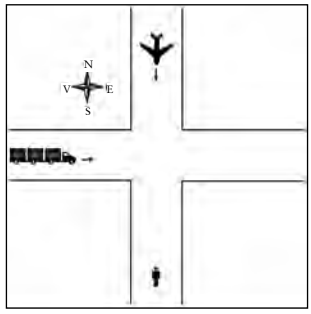


Figura 87

Ca să asigure simetria legilor fizicii pentru observatorii aflați în mișcare uniformă, precum și invarianța vitezei luminii, teoria relativității restrânse avea de plătit un preț. Einstein a descoperit că spațiul și timpul nu pot fi tratate drept entități separate. Ele sunt inseparabil legate una de alta, prin simetrie. Articolul original al lui Einstein asupra relativității restrânse avea nepretențiosul titlu „Asupra electrodinamicii corpurilor în mișcare“ (figura 88 arată pagina de titlu), dar, așa cum va arăta următorul exemplu, el ne-a schimbat literalmente percepția realității.

Să ne imaginăm că, pe o perioadă de câțiva ani, înregistrați pe bandă video un măr pus pe o masă, pe măsură ce mărul îmbătrânește și se dezintegrează. Ceea ce acest (nu prea pasionant) film surprinde este „mișcarea“ mărului prin timp, opusă mișcării sale prin spațiu. Timpul, conform relativității restrânse, este ce-a de-a patra dimensiune, ce trebuie adăugată familiarelor

891

3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper;
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der in beiden Fällen ins Auge gefaßten Größen

Figura 88

trei dimensiuni ale spațiului. Atunci când mărul este propulsat cu o oarecare viteză, el călătorește în mod necesar prin toate cele patru dimensiuni, fiindcă pe măsură ce se deplasează prin spațiu, și timpul progresează. Va îmbătrâni mărul în mișcare în aceeași cadență ca un măr staționar? Surprinzătorul răspuns al relativității restrânse este că nu. Cu cât se deplasează mai repede prin spațiu, cu atât mai încet va ticăi „ceasul" mărului, văzut de un observator aflat în repaus. Atunci când viteza lui se apropie de cea a luminii, ritmul de scurgere a timpului său (pentru un observator aflat în repaus) va încetini până la un fel de târâre. Acest lucru ar părea incredibil dacă n-ar fi fost confirmat fără echivoc printr-o multitudine de experimente. Spre exemplu, în atmosfera superioară a pământului este produsă în mod constant o particulă elementară numită mezon, ca urmare a bombardamentelor particulelor de înaltă energie cunoscute drept raze cosmice. Faptul că acești mezoni pot călători prin zecile de kilometri ai atmosferei se datorează în întregime încetinirii relativiste a „ceasurilor" lor interne. În repaus, mezonii nu trăiesc decât circa două milionimi de secundă înainte de a se descompune în particule mai ușoare. Pentru niște vieți atât de scurte, chiar dacă particulele ar fi vâjâit prin spațiu cu viteza luminii, timpul de călătorie prin atmosferă ar fi de

peste zece ori mai lung decât durata lor de viață (în absența efectelor relativiste). Cercetătorii care, în 1941, au cronometrat și au numărat astfel de mezoni între vârful și baza muntelui Washington din New Hampshire au confirmat că particulele călătoare de acest gen trăiesc mai mult[4], exact așa cum prezice relativitatea restrânsă. Experimente efectuate în 1975, în care mezonii erau accelerați până la 99,94% din viteza luminii, au arătat că cei extrem de rapizi trăiesc de 29 de ori mai mult decât cei în stare de repaus, din nou în complet acord cu ceea ce era de așteptat conform relativității restrânse.

În regulă, puteți gândi, dar mezonii sunt niște particule elementare bizare, nu ceasuri normale. S-ar încetini oare și ceasurile noastre de mână sau bătăile inimii dacă ne-am deplasa cu viteze apropiate de viteza luminii ? Ei bine, un experiment din 1971 a utilizat ceasuri adevărate. Fizicienii Joseph Carl Hafele și Richard Keating[5] au zburat în jurul globului în direcții opuse, cu avioane comerciale Pan Am. Aveau la ei patru ceasuri atomice, care fuseseră sincronizate la începutul călătoriei cu un ceas staționar din Washington, D.C. La sfârșitul călătoriei, ceasurile transportate spre est (cu viteză, ca atare, mai mare decât cea de rotație a pământului) au arătat, după cum era de așteptat, un timp scurs mai scurt cu 59 de miliardimi de secundă, iar cele duse spre vest (efectiv mișcându-se mai încet decât ceasul din D.C.) au înregistrat timpi mai lungi cu 273 miliardimi de secundă.

Una dintre predicțiile-cheie ale relativității restrânse este aceea că rapiditățile de mișcare ale unui corp prin dimensiunile spațiu și timp se combină întotdeauna, pentru a da exact viteza luminii. Un mezon în repaus, spre exemplu, are întreaga sa „viteză“ îndreptată în direcția timp, fiindcă el nu „călătorește“ decât prin dimensiunea timp. Pentru mezoni în mișcare, cu cât este mai mare componenta vitezei lor prin spațiu, cu atât mai lent este procesul de „îmbătrânire“, timpul ajungând efectiv să se oprească în loc (pentru observatori în repaus) atunci când viteza mezonilor se apropie de viteza luminii. Lumina însăși călătorește întotdeauna prin spațiul tridimensional exact cu viteza luminii. Relativitatea restrânsă ne spune că ea nu poate

călători pe nicăieri cu o altă viteză și nu este niciodată posibil să ajungi din urmă lumina – lumina nu poate fi niciodată în repaus. În acest sens, perceperea ei seamănă puțin cu perceperea mișcării într-un film. Fiecare cadru din film surprinde o scenă puțin diferită, iar atunci când aceste cadre sunt desfășurate rapid și succesiv pe dinaintea ochilor noștri, putem sesiza mișcarea. Atunci când filmul se oprește, mișcarea încetează. Putem vedea lumină numai dacă ea se deplasează cu viteza luminii.

Destul de ciudat, în pofida incredibilei sale intuiții și profundei perspicacități din fizică, atitudinea lui Einstein față de matematica pură[6] a fost la început destul de rece. Ca student în Zürich, nu prea buna frecvență la orele ținute de matematicianul Hermann Minkowski (1864–1909) i-a adus porecla de „potaie leneșă". Printr-o ironică întoarcere a istoriei, odată ce Einstein și-a publicat teoria relativității restrânse, însuși Minkowski a fost cel care a utilizat simetria pentru a pune această teorie pe o bază matematică solidă. Minkowski a arătat că spațiul și timpul pot fi „rotite" ca o entitate cvadridimensională, exact așa cum poate fi rotită o sferă într-un spațiu tridimensional. Mai important, în același fel în care o sferă este simetrică (adică nu se schimbă) dacă este rotită cu orice unghi în jurul oricărei axe, și ecuațiile relativității restrânse a lui Einstein sunt simetrice („covariante" în jargonul fizicii) față de rotațiile spațio-temporale. Această remarcabilă simetrie a ecuațiilor a devenit cunoscută drept *covarianța Lorentz*, după fizicianul olandez Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), cel dintâi care a descris aceste transformări, în 1904. Probabil că nu veți fi prea surprinși să aflați că ansamblul tuturor transformărilor de simetrie ale dimensiunilor spațiu-timp Minkowski formează un grup, similar cu grupul rotațiilor și translațiilor obișnuite, în trei dimensiuni. Acesta se numește *grupul Poincaré*, după excepționalul matematician francez care a perfecționat baza matematică a relativității restrânse.

Suspicios mai întâi („de când matematicienii au invadat teoria relativității, eu însumi nu o mai înțeleg"), Einstein începea încet să priceapă incredibila putere a simetriei. Dacă legile

naturii trebuie să rămână neschimbate pentru observatori în mișcare, nu numai că ecuațiile care le descriu trebuie să asculte de covarianța Lorentz, *dar legile însele pot fi deduse din cerința de simetrie*. Această profundă realizare a inversat literalmente procesul logic pe care Einstein (și mulți dintre fizicienii care l-au urmat) îl folosea pentru a formula legile naturii. În loc de a porni de la informații furnizate de experimente și observații asupra naturii, apoi de a formula o teorie și a verifica dacă ea ascultă de unele principii de simetrie, Einstein a realizat că cerințele de simetrie pot veni primele și dicta legile cărora trebuie să li se supună natura. Permiteți-mi să demonstrez acest tip de inversare intrare-ieșire, utilizând câteva analogii simple.

Să presupunem că n-ați mai văzut niciodată un fulg de zăpadă, dar vi se cere să-i ghiciți forma generală. Clar, fără cel puțin câteva informații inițiale, nu puteți spune nimic. Nici chiar desenul unui colț al fulgului de zăpadă (figura 89) nu e de mare ajutor – nu puteți ghici forma elefantului după coada sa. Acum, totuși, vi se dau câteva indicii suplimentare – vi se spune că forma generală este simetrică la rotații de 60° în jurul centrului. Această indicație limitează imediat posibilitățile la fulgi de zăpadă cu 6 colțuri, 12 colțuri, 18 colțuri și așa mai departe. Fiindcă natura optează, de obicei, pentru soluțiile cele mai simple și mai economice, fulgii de zăpadă cu 6 colțuri (ca în figura 90)

Figura 89

Figura 90

ar fi o excelentă ipoteză. Simetria impune constrângeri atât de rigide, încât teoria este călăuzită, aproape inevitabil, spre adevăr.

Ca un exemplu ceva mai complicat, să ne imaginăm că biologii dintr-un îndepărtat sistem solar investighează structura ADN a tuturor formelor de viață de pe planeta lor. După ani de muncă, ei descoperă că viața este întotdeauna bazată pe catene foarte lungi de ADN, care se prezintă sub șapte forme diferite, ca cele din figura 91. O studiere atentă a diferitelor „motive" ale catenelor ne dezvăluie că fiecare dintre ele poate fi obținută printr-o operație de simetrie sau printr-o combinație de operații de simetrie, asupra simbolului de bază *b*. Spre exemplu, prima catenă implică numai simetria de translație – motivul este pur și simplu deplasat, în mod repetat. Cea de a doua catenă prezintă o *reflexie cu translație* care, după cum vă amintiți (Capitolul 1), implică imagini oglindite care sunt translatate una în raport cu alta. Cea de a patra catenă se obține prin translație și reflexie în raport cu o linie de oglindire orizontală. La cel de-al șaselea motiv ADN se poate ajunge în mai multe moduri diferite – spre exemplu, prin translații succesive a patru simboluri sau prin reflexo-translații succesive ale unei perechi de simboluri reflectate. Într-o încercare de a-și formula descoperirile în limbajul unei legi, biologii extratereștri ar putea conchide că toate catenele ADN sunt aranjate în motive simetrice față de diferite combinații de translații, rotații, reflexii și reflexo-translații. Să presupunem, totuși, că biologii (poate că după ce vor fi descoperit câteva catene) aveau ideea să înceapă de la ipoteza că fibrele ADN trebuie să asculte de unele simetrii. Ei puteau aborda apoi problema din capătul opus, cerând de la bun început ca fibrele ADN să fie simetrice. Clar, nu există nici un mod de a ghici motivul de bază – acesta ar fi putut

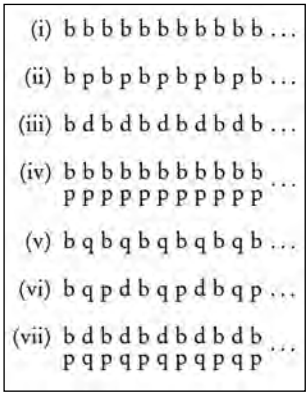

(i) b b b b b b b b b b ...
(ii) b p b p b p b p b p ...
(iii) b d b d b d b d b d ...
(iv) b b b b b b b b b b
p p p p p p p p p p ...
(v) b q b q b q b q b q ...
(vi) b q p d b q p d b q p ...
(vii) b d b d b d b d b d
p q p q p q p q p q ...

Figura 91

arăta ca *b*, ca o stea sau ca rățoiul AFLAC. Totuși, odată ce se descoperă motivul, se poate utiliza teoria grupurilor pentru a demonstra că există numai șapte modele distincte[7] de catene ce pot fi formate utilizând combinațiile celor patru simetrii de mai sus. Toate celelalte modele nu sunt decât variații ale celor șapte fundamentale. Cu alte cuvinte, cerințele de simetrie în acest caz dictează fără echivoc numărul de modele existente. Matematicianul John Horton Conway, de la Universitatea Princeton, le-a dat nume amuzante celor șapte tipuri diferite de modele de catene. Ele corespund modelelor amprentelor de picior obținute atunci când fiecare acțiune se repetă: țopăie într-un picior, pășește, sari, mergi pieziș, țopăie rotindu-te, mergi pieziș rotindu-te, sari rotindu-te.

Simetriile legilor fizicii la translații, rotații și mișcare uniformă (inclusiv invarianța vitezei luminii) sunt absolut esențiale pentru modul nostru de a înțelege spațiul și timpul, dar ele în sine nu impun existența a noi forțe sau a noi particule. După cum vom vedea în curând, totuși, încercările de a înțelege gravitația și de a unifica toate forțele de bază ale naturii au ridicat semnificația principiilor de simetrie la un și mai înalt nivel – simetria a ajuns *sursa* forțelor.

O simetrie hotărâtoare

Splendoarea relativității restrânse a extins orizonturile simetriei legilor fizicii la toți observatorii aflați în mișcare uniformă. Dar, vă puteți întreba, ce se poate spune despre cei supuși unei accelerații? În general, mai toate mișcările pe care le observăm în jurul nostru nu sunt uniforme – ele pornesc din repaus, ajung în repaus sau implică devieri, curbe ori rotații. Dacă legile electromagnetismului, să spunem, ar înceta să mai fie valabile sau ar fi, dar ar suferi niște schimbări semnificative, în cazul unei rachete accelerând de pe rampa ei de lansare, n-am fi în stare să trimitem astronauți în spațiu. Einstein nu era pregătit să accepte o asemenea idee. Într-adevăr, de ce ar trebui să depindă legile de felul în care se mișcă observatorul? Mai mult

decât atât, mișcarea accelerată este atât de răspândită – de la mișcarea planetelor în jurul Soarelui până la alergătorii de viteză de pe pistele stadioanelor –, încât orice teorie care nu abordează problema accelerației este categoric incompletă. O altă deficiență evidentă a relativității restrânse era faptul că teoria ignora total gravitația. Și totuși gravitația se manifestă pretutindeni, iar spre deosebire de electromagnetism, de ale cărui forțe ne putem feri, nu există nici un mijloc de a scăpa de gravitație. Unul dintre principalele scopuri ale lui Einstein a devenit, ca atare, extinderea sferei simetriei. În particular, el simțea că legile naturii trebuie să fie aceleași nu numai pentru observatorii care se deplasează cu viteze constante, ci pentru toți, indiferent dacă se află într-un laborator în care li se imprimă o accelerație de-a lungul unei linii drepte, în călușei sau oriunde altundeva. Exact așa cum biologii fictivi din subcapitolul precedent ar fi putut să înceapă cu principiul simetriei și să deducă apoi din el cele șapte modele posibile de catene, și Einstein dorea să pună simetria pe primul loc. Inspirat de covarianța Lorentz a relativității restrânse (faptul că ecuațiile nu se schimbă la rotații ale dimensiunilor spațiu-timp), el cerea acum covarianță generală, implicând o simetrie a legilor naturii – oricare ar fi acelea – la orice schimbare a coordonatelor spațiului și timpului. Aceasta nu era o cerință banală. La urma urmelor, cele circa un milion de răniri anuale produse numai în mijloacele de transport din Statele Unite demonstrează că oamenii simt accelerațiile bruște. De fiecare dată când virăm subit în altă direcție, simțim cum corpul ne este împins lateral de forța centrifugă, iar avioanele ce se ciocnesc de pungi de aer ne întorc stomacurile pe dos. În aparență, există o neîndoioasă distincție între mișcarea uniformă și cea accelerată. Atunci când ne urcăm într-un tren sau într-un lift care se deplasează cu viteză constantă, nu simțim mișcarea. Punctul nostru de vedere – că noi suntem în repaus, iar toate obiectele din jurul nostru se mișcă – este la fel de valabil ca acela al oamenilor care își flutură mâinile în semn de rămas-bun de pe un peron sau al acelora ce așteaptă răbdători în foaierul hotelului. Atunci când obrajii unui astronaut sunt trași cu forță în jos la lansare, pe de altă parte, este clar

că el simte accelerația. Așadar, cum pot fi legile fizicii aceleași, chiar și în sisteme de referință supuse accelerației? Ce-i cu aceste forțe suplimentare? Găsirea soluției acestei enigme a reprezentat realizarea supremă a lui Einstein, ea solicitându-i ani întregi de muncă. Să încercăm să-i urmărim gândurile pe când căuta să stabilească simetria drept sursa tuturor legilor fizicii.

Să ne imaginăm viața într-un vagon de marfă supus accelerației (figura 92). Dacă vagonul de marfă accelerează constant spre dreapta, știm din experiența de fiecare zi că orice lucru va fi împins înapoi (spre stânga în figură). Lampa atârnată de tavan, spre exemplu, va fi înclinată față de direcția verticală. Orice obiect scăpat pe jos va cădea sub un anumit unghi, iar orice persoană așezată pe un scaun, cu fața în sensul de mers, va simți o presiune exercitată de scaun, atât dinspre placa de sub ea, cât și dinspre spătar. Acest lucru este foarte lesne de înțeles. Dacă cineva din vagon scapă cheile, viteza lor orizontală rămâne neschimbată (în afară de mici modificări produse de rezistența aerului), egală cu viteza pe care o aveau ele în momentul în care au căzut. În același timp, vagonul de marfă accelerează continuu, spre viteze tot mai mari. De aceea, cheile rămân în urmă, traiectoria lor de cădere fiind înclinată spre înapoi. Aici, totuși, ne dăm seama de un lucru important. Experiențele persoanei din vagonul accelerat nu diferă de acelea pe care le-am avea dacă gravitația însăși ar fi mai intensă și ar fi înclinată, în loc să se îndrepte exact în jos. Cu alte cuvinte, forța gravitațională produce exact aceleași fenomene ca și acelea observate în mișcare accelerată.

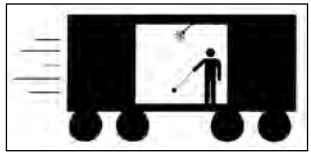


Figura 92

Să considerăm o altă situație. Atunci când stăm în picioare pe un cântar de baie aflat în interiorul unui lift care accelerează în sus, cântarul va înregistra o greutate mai mare (din cauză că picioarele noastre exercită o presiune sporită asupra sa) – ca și cum gravitația ar deveni mai intensă. Un lift accelerând în jos ar crea senzația că gravitația este mai slabă. În situația extremă în care cablul liftului plesnește, noi și cântarul

de baie am cădea liber la unison, iar cântarul ar înregistra greutate zero. (Dar aceasta nu este o metodă de slăbire, deoarece… gândiți-vă ce ar înregistra cântarul atunci când liftul ar da în cele din urmă de fundul puțului!) Astronauții plutesc „lipsiți de greutate" în interiorul stației spațiale nu din cauză că sunt în afara sferei de gravitație terestră, ci fiindcă atât stația, cât și persoanele din ea sunt supuse aceleiași accelerații spre centrul Pământului – și una, și ceilalți se află în cădere liberă.

Tot imaginându-și diverse experimente de acest tip, Einstein a ajuns în cele din urmă, în 1907, la o concluzie extraordinară: *Forța de gravitație și forța de accelerație*[8] *sunt, de fapt, unul și același lucru*. Această importantă unificare a căpătat denumirea de *principiul echivalenței* – accelerația și gravitația sunt două forme de manifestare ale aceleiași forțe; ele sunt echivalente. În interiorul unui lift aflat în cădere liberă este imposibil să spui dacă lipsa de greutate este cauzată de orientarea în jos a accelerației liftului sau de gravitația miraculos „întreruptă". Einstein a descris momentul de iluminare divină pe care-l avusese în 1907 într-o prelegere susținută la Kyoto, în 1922: „Ședeam în oficiul de brevete[9] din Berna [Elveția] când deodată mi-a venit un gând: dacă cineva cade liber, nu-și simte propria greutate. Eram uluit. Acest gând simplu a făcut o impresie profundă asupra mea. El m-a împins spre o teorie a gravitației." Laboratoarele medicale se folosesc permanent de principiul echivalenței. Ele utilizează centrifuge pentru a învârti rapid diverse fluide, în scopul separării substanțelor cu densități diferite. Centrifugele acționează ca niște mașini producătoare de forță gravitațională artificială. Accelerația mișcării de rotație este echivalentă cu o creștere a forței gravitaționale.

O afirmație privitoare la caracterul atotcuprinzător al simetriei însoțea principiul echivalenței – legile fizicii, așa cum sunt ele exprimate de ecuațiile relativității generale, sunt exact aceleași în toate sistemele, inclusiv în cele accelerate. Adică, legile sunt simetrice la orice schimbare a coordonatelor spațio-temporale. De ce există atunci aparente diferențe între ceea ce se observă, să zicem, dintr-un scrânciob și într-un echipament de laborator aflat în repaus? Acestea, ne spune relativitatea

generală, nu sunt decât diferențe dictate de *mediul înconjurător*, nu ale legilor înseși. În același mod în care, din cauza gravitației, sensurile sus și jos par diferite pe pământ (în pofida simetriei legilor la rotații), tot așa și observatorii din scrânciob simt forța centrifugă, care este echivalentă cu gravitația. Cu alte cuvinte, simetria tuturor sistemelor de referință, inclusiv a celor accelerate, *pretinde* existența gravitației. Așa cum ne-au arătat exemplele vagonului și liftului aflate în mișcare accelerată, legile fizicii într-un sistem de referință supus accelerației sunt de nedistins de acelea dintr-un sistem supus gravitației.

Înarmat cu puternica înțelegere pe care i-o oferea principiul echivalenței, Einstein simțea că era, în sfârșit, pregătit să atace cele mai interesante două întrebări pe care teoria gravitației a lui Newton le lăsase total fără răspuns. Mai întâi și înainte de toate era întrebarea de un milion de dolari „cum": Cum își face gravitația trucul? Sau, ca alternativă: Cum poate Soarele, care este la o distanță de aproape 150 de milioane de kilometri de Pământ, să exercite o atracție gravitațională de neînvins, care menține Pământul pe orbită?

Newton era perfect conștient[10] de faptul că n-avea nici un răspuns:

> Până acum am explicat fenomenele cerurilor și ale mărilor noastre prin puterea gravitației, *dar nu am atribuit încă nici o cauză acestei puteri* [subliniere adăugată]. Este absolut sigur că totul trebuie să purceadă de la o cauză ce pătrunde până în centrele Soarelui și planetelor, fără a suferi nici cea mai mică diminuare a forței sale… și-și propagă puterea în toate părțile, până la imense distanțe, descrescând întotdeauna cu inversul pătratului distanțelor… Dar până acum nu am fost în stare să deduc din fenomene cauza acestor proprietăți ale gravitației, iar eu nu formulez ipoteze.

În al doilea rând, exista un tulburător conflict între relativitatea restrânsă și noțiunea de gravitație a lui Newton. În vreme ce prima afirmă hotărât că nici o masă, energie sau informație nu se poate propaga mai repede decât lumina, Newton privea gravitația ca exercitându-și forța instantaneu în vaste întinderi

de spațiu. O astfel de gravitație „rapidă" ar fi deschis ușa unor fenomene cu adevărat bizare și nedorite. Spre exemplu, dacă Soarele ar dispărea deodată, toate planetele din sistemul solar ar începe imediat să se miște de-a lungul unor linii aproape drepte, fiindcă forța care le menține pe orbite eliptice s-ar anula. Totuși, Soarele n-ar dispărea efectiv din vederea oamenilor de pe Pământ decât circa opt minute mai târziu, căci atât îi ia luminii pentru a străbate distanța Soare–Pământ. Dacă ar exista locuitori pe Neptun, ei și-ar începe călătoria în spațiul rece cu peste patru ore înainte de a vedea Soarele dispărând. O asemenea răsturnare a cauzei și efectului ar transforma percepția noastră asupra realității într-un coșmar de neînțeles. Crezând ferm în corectitudinea relativității restrânse și a principiului echivalenței, Einstein și-a dat seama că venise timpul pentru o revizuire completă a teoriei newtoniene a gravitației.

El trebuie să fi avut primele indicii ale posibilității unui spațiu-timp curbat în urma imaginării unui alt experiment interesant. Acesta a fost inițial propus de fizicianul Paul Ehrenfest (1880–1933) și a devenit ulterior cunoscut drept *paradoxul lui Ehrenfest*[11]. Unul dintre rezultatele cunoscute ale relativității restrânse este acela că lungimile corpurilor în mișcare, așa cum sunt ele măsurate de observatori în repaus, se contractează pe direcția mișcării. Contracția este cu atât mai mare cu cât viteza este mai mare. Aceasta nu-i o iluzie – un băț aflat în mișcare poate fi închis pentru moment într-un spațiu care nu i-ar fi suficient în stare de repaus. Să considerăm atunci ce se întâmplă cu un obiect plat, ca un compact-disc, dacă se rotește foarte repede. Fiindcă circumferința se rotește mai repede decât interiorul, ea se va contracta mai mult. Drept urmare, discul se va deforma, căpătând o anumită curbură. Odată ce ideea de accelerație ca sursă a curbărilor era introdusă, Einstein nu s-a mai lipsit de ea. El a conchis că accelerația va curba însăși structura spațiu-timp. Iar dacă, potrivit principiului echivalenței, accelerația poate face spațiul să fie curbat, același lucru îl poate face și gravitația. Aceasta a devenit esența relativității generale – *gravitația curbează și îndoaie spațiul-timp* în același fel în care trapeziștii de la circ deformează plasa de

siguranță pe care aterizează. La fel cum obiectele grele arcuiesc mai pronunțat o trambulină, cu cât este mai mare masa unui corp, cu atât mai curbat devine spațiul-timp în preajma sa. Calea pe care și-o croiește un automobil de teren prin dunele de nisip ale Saharei este determinată de forma terenului accidentat. Similar, traiectoriile planetelor în jurul Soarelui sunt determinate de curbura produsă de Soare în spațiu-timp. Planetele nu fac decât să caute cea mai directă rută, iar formele orbitelor lor dezvăluie geometria curbată a spațiului-timp. În sistemul de referință al unui spațiu-timp curbat, influența gravitației nu este categoric instantanee. Einstein a calculat că perturbațiile pricinuite în forma spațiului-timp se propagă asemenea undelor într-un iaz, *exact cu viteza luminii*. Dacă Soarele ar dispărea în chip miraculos, anularea influenței sale gravitaționale ar ajunge la Pământ în opt minute – simultan cu dispariția sa vizuală. Acest mulțumitor rezultat elimina ultima problemă sâcâitoare a fizicii newtoniene.

Faptul că Einstein a transformat spațiul-timp curbat în piatra de temelie a noii sale teorii cosmologice a creat necesitatea găsirii unor instrumente matematice care să descrie asemenea spații. Orele de matematică de la care chiulise în timpul școlii au început să-l obsedeze. Din fericire, cel ce se arătase anterior atât de sceptic în privința matematicii avea pe cineva căruia să i se adreseze – Marcel Grossman (1878–1936), fost coleg de clasă cu Einstein, acum un matematician realizat. Pe un ton neajutorat ce nu-i era caracteristic[12], Einstein s-a căit: „Am căpătat un mare respect pentru matematică, ale cărei cele mai subtile părți le considerasem mai înainte drept pur lux!" Grossman s-a dovedit a fi demn de încrederea acordată. El i-a recomandat lui Einstein atât geometria neeuclidiană a lui Riemann, cât și metodele matematice elaborate de matematicienii Elwin Christoffel, Gregorio Ricci-Curbastro și Tullio Levi-Civita. Amintiți-vă că Riemann „anticipase", de fapt, exact instrumentul de care avea nevoie Einstein – o geometrie a spațiilor curbate, în orice număr de dimensiuni. Introducerea metodelor analizei matematice în geometrie, prin ramura numită *geometrie diferențială*, și dezvoltarea *calculului tensorial* au permis

efectuarea unor determinări precise (tensorii sunt „cutii de numere“ ce pot reprezenta spații de orice ordin dimensional). După câteva impasuri în care s-a aflat în anii 1912–1915, Einstein s-a hotărât să-și urmeze principala lumină călăuzitoare – simetria tuturor elementelor implicate de principiul covarianței generale. Intuiția sa a dat roade și, pe la sfârșitul lui 1915, a luat naștere relativitatea generală, o teorie atotcuprinzătoare a spațiului-timp și a gravitației (figura 93 arată pagina de titlu a studiului). Într-o însemnare adresată fizicianului teoretician Arnold Sommerfeld, Einstein nu-și putea ascunde exuberanța: „Uită-te bine la ele [la ecuațiile relativității generale]; sunt cea mai valoroasă descoperire a vieții mele.“

Die Grundlage der
allgemeinen Relativitätstheorie
von
A. Einstein
Leipzig : Verlag von Johann Ambrosius Barth : 1916

Figura 93

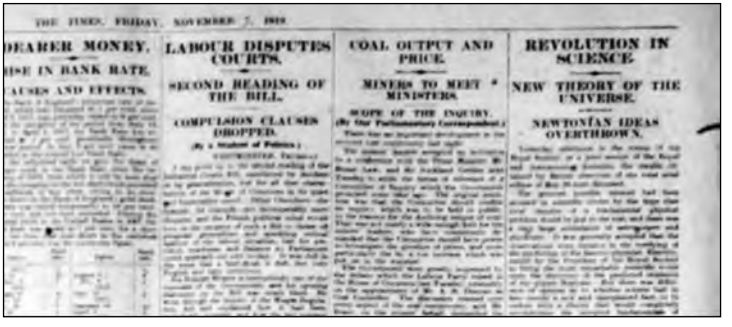
Einstein a fost primul care a recunoscut cât de mult datorează matematicii. Într-o conferință ținută la Academia Prusacă de Științe[13], în 1921, el declara: „Putem de fapt considera [geometria] drept cea mai veche ramură a fizicii… Fără ea, aș fi fost incapabil să formulez teoria relativității.“ Într-o prelegere din 1933, el adăuga: „Principiul creator [al științei] rezidă în matematică.“

Aproape din ziua primei sale apariții, simetria subiacentă și simplitatea logică a relativității generale i-au adus mulți admiratori între cei mai mari fizicieni ai timpului. Ernest Rutherford (cel care a descoperit nucleul atomic) și Max Born (un pionier al mecanicii cuantice) i-au comparat mai târziu teoria cu o operă de artă.

Una dintre predicțiile-cheie ale relativității generale era curbarea razelor de lumină sub influența gravitației. Mai exact, ea spunea că Soarele curbează lumina provenită de la stele poziționate direct în spatele său. Pentru ca lumina solară să

nu covârșească total lumina stelară, observațiile trebuiau efectuate în timpul unei eclipse totale de Soare, atunci când Luna blochează lumina Soarelui. Ideea de bază a experimentului era simplă: comparând o fotografie făcută în timpul eclipsei solare cu o alta, a aceluiași petic de cer, făcută atunci când lumina stelară este nedeviată, se putea încerca măsurarea micilor deplasări aparente ale pozițiilor stelare, cauzate de curbarea luminii.

Observațiile, efectuate de două echipe britanice, au avut loc pe timpul eclipsei solare de pe 29 mai 1919, dar Einstein n-a primit confirmarea finală a rezultatelor până pe 22 septembrie. Cele două echipe, una dintre ele condusă de faimosul astrofizician britanic Arthur Eddington (1882–1944), au găsit o deflexie medie de 1,79 secunde de arc, ceea ce corespundea perfect (în limitele erorilor experimentale așteptate) cu predicția relativității generale. Extrem de entuziasmat și bucuros, Einstein s-a grăbit să-și informeze mama. Confirmarea relativității generale a fost anunțată formal într-o ședință comună a Societății Regale și a Societății Astronomice Regale din Londra, pe 6 noiembrie 1919, fiind pe drept declarată „una dintre cele mai mari realizări din istoria gândirii umane". A doua zi, întreaga lume s-a trezit doar pentru a afla de o „Revoluție în Știință" (figura 94 arată articolul publicat în *Times* pe 7 noiembrie 1919), iar Einstein era instantaneu propulsat până la neașteptatul statut de stea a presei. Dar asta nu înseamnă că lumea a înțeles toate implicațiile noii teorii. Potrivit unei populare anecdote, un



THE TIMES, FRIDAY, NOVEMBER 7, 1919.

DEARER MONEY.
RISE IN BANK RATE.
CAUSES AND EFFECTS.

LABOUR DISPUTES (COURTS).
SECOND READING OF THE BILL.
COMPULSION CLAUSES DROPPED.

COAL OUTPUT AND PRICE.
MINERS TO MEET MINISTERS.
SCOPE OF THE INQUIRY.

REVOLUTION IN SCIENCE.
NEW THEORY OF THE UNIVERSE.
NEWTONIAN IDEAS OVERTHROWN.

Figura 94

reporter l-a întrebat pe Eddington dacă realmente teoria relativității este așa de complicată încât, în afară de Einstein, numai doi alți oameni din lume pot s-o înțeleagă cu adevărat. Eddington a rămas tăcut câteva minute. Reporterul l-a încurajat să nu fie prea modest, la care Eddington a replicat: „Deloc, încercam doar să-mi închipui cine este cealaltă persoană."

Chiar și astăzi, mă simt copleșit de respect când mă gândesc la lanțul uimitor de idei și de interconexiuni făcut ulterior. Călăuzit permanent de principiile simetriei, Einstein a arătat mai întâi că accelerația și gravitația erau doar două fațete ale aceleiași medalii. El a extins apoi conceptul, pentru a demonstra că gravitația nu face decât să reflecte geometria spațiului-timp. Instrumentul pe care l-a utilizat pentru a elabora teoria era geometria neeuclidină a lui Riemann – exact cea utilizată de Felix Klein pentru a arăta că geometria, în general, este, de fapt, o manifestare a teoriei grupurilor (din cauză că orice geometrie se definește prin simetriile sale – obiectele pe care le lasă neschimbate). Nu e acesta un lucru uimitor?

Amintiți-vă că Galois era destul de nesigur cu privire la aplicațiile ideilor sale de teoria grupurilor. Puterile combinate ale imaginațiilor unor matematicieni ca Lie, Klein, Riemann, Minkowski, Poincaré și Hilbert „și-au unit forțele" cu neîntrecuta intuiție fizică a lui Einstein, pentru a transforma simetria și teoria grupurilor în cei mai de bază descriptori ai spațiului-timp și ai gravitației.

În lumea cuantică

Oricât de importante sunt simetriile pentru legile ce descriu spațiul-timp și gravitația, rolul lor crește și mai mult în domeniul particulelor subatomice. Spre deosebire de fizica noastră clasică, unde cuvântul *particulă* sugerează de obicei imaginea unui obiect de dimensiunile unei bile de biliard, în teoria cuantică – cadrul de lucru teoretic utilizat în fizica particulelor – particulele se pot comporta ca undele. Starea oricărui sistem și evoluția sa în timp sunt descrise de o entitate numită *funcție*

de undă. Funcția de undă a unui electron este o undă de probabilitate, utilizată, spre exemplu, pentru a determina probabilitatea de a găsi electronul într-o anumită poziție, cu o direcție de spin particulară. Fiindcă toți electronii din univers sunt identici, singurul mod de a-i distinge unul de altul este prin energie, moment cinetic (produsul dintre masă și viteză în fizica clasică) și spin. Aceste mărimi de bază se definesc în mecanica cuantică prin răspunsul funcției de undă la diverse transformări de simetrie în spațiu și timp. Energia, spre exemplu, reflectă schimbarea ce rezultă în funcția de undă prin modificarea coordonatei temporale[14] (echivalentă cu resetarea ceasurilor). Să explicăm pe scurt acest concept. Să ne închipuim că doi fotografi surprind câte o imagine a undelor circulare ce se propagă din punctul de impact al unei pietricele aruncate într-un iaz. Blițurile ambelor aparate de fotografiat sunt programate să se declanșeze exact la ora 8:00 a.m. Totuși, unul dintre cele două ceasuri care controlează blițurile se întâmplă să fie în urmă cu o secundă. Aceasta înseamnă că, deși cele două aparate de fotografiat vor înregistra aceeași undă, ele o vor surprinde în faze puțin diferite. Acolo unde o fotografie arată o creastă de undă, cealaltă poate arăta o vale și viceversa. Mecanica cuantică definește energia unui sistem, cum ar fi electronul, prin schimbarea suferită de faza funcției sale de undă (măsurată în cicli de undă) din cauza diferenței de o secundă dintre ceasuri. Similar, momentul electronului caracterizează schimbarea suferită de faza funcției de undă printr-o mică translație în spațiu. Deși aceste definiții leagă proprietăți fizice fundamentale de transformări de simetrie, ele sună, probabil, surprinzător de abstract. Oricine a învățat ceva fizică la liceu își amintește că mărimi ca energia și momentul cinetic sunt, în mod normal, asociate cu un concept destul de diferit – *legile de conservare*. Legile de conservare reflectă faptul că unele mărimi nu pot fi nici create, nici distruse – ele au aceleași valori fie că le măsurăm astăzi, mâine sau peste un milion de ani. Conservarea energiei este echivalentul fizic al vorbei „nu există prânz gratis". Dacă am putea obține energie din nimic, n-am plăti mai mult la pompele de benzină de fiecare

dată când producția de petrol se micșorează. Conservarea momentului cinetic este familiară oricui a urmărit cum se ciocnesc bilele de biliard. Nu veți vedea niciodată două bile rostogolindu-se înapoi (spre jucător) – momentul total al bilelor ricoșate trebuie să fie egal cu momentul bilei lovite cu tacul. Legile de conservare sunt pentru fizicieni micul dejun, masa de prânz și cina. Cei specializați în particule elementare, bunăoară, utilizează acceleratoare uriașe pentru a produce ciocniri între particule. Aceste acceleratoare sunt structuri gigantice (cel din Geneva, Elveția, utilizează un tunel circular lung de 27 de kilometri), în care particulele subatomice sunt accelerate până la energii extrem de înalte. Scopul este de a testa forțele fundamentale pe distanțe din ce în ce mai mai scurte și de a produce particulele mai grele a căror existență este prezisă teoretic. Experimentatorii profită de faptul că energia totală și momentul cinetic total ale produselor de coliziune trebuie să fie exact egale (din cauza legilor de conservare) cu cele ale particulelor incidente și ale particulelor-țintă pentru a determina chiar și proprietăți ce nu pot fi detectate direct de aparatul experimental.

Aparent, de aceea, s-ar zice că avem două tipuri de definiții, care nu sunt legate între ele. Pe de o parte, mărimile de bază, ca energia și momentul cinetic, se definesc prin răspunsul funcției de undă la transformările de simetrie. Pe de alta, aceleași mărimi se asociază cu legile de conservare. Care este relația exactă dintre simetriile legilor fizicii și legile de conservare? Neașteptatul răspuns a fost dat de matematiciana germană Emmy Noether (1882–1935) și îl cunoaștem de obicei sub denumirea de *teorema lui Noether*. Înainte de a explica acest rezultat, totuși, vreau să descriu foarte pe scurt viața acestei extraordinare femei, pentru a arunca o oarecare lumină asupra tipului de dificultăți de care s-a lovit ea într-o lume a matematicii dominată de bărbați.

Emmy Noether s-a născut în Germania, la Erlangen[15], unde tatăl său era profesor de matematică. Intenția ei inițială a fost să devină profesoară de franceză și engleză, dar la vârsta de 18 ani s-a decis să studieze matematica. Acest lucru a reieșit că este mai ușor de zis decât de făcut. Deși în Franța femeilor

li se permisese încă din 1861 să se înscrie la universități, acest lucru nu le era încă îngăduit oficial în conservatoarea Germanie a lui 1900. Senatul Universității din Erlangen declara în 1898 că admiterea studentelor „ar răsturna toată ordinea universitară". Cu toate acestea, Emmy a primit permisiunea specială de a participa la unele cursuri. După ce a trecut cu succes examenele organizate la Nürnberg, Göttingen și Erlangen – și grație schimbărilor lente, dar treptate în atitudinea diferită față de sexe –, în cele din urmă i s-a decernat un doctorat în matematică, în 1907. Acesta nu era, totuși, sfârșitul bătăliilor ei cu instituțiile universitare germane. Deși fusese invitată în 1915 de David Hilbert și de Felix Klein să vină la catedra de matematică din Göttingen, acești doi renumiți matematicieni mai aveau de luptat cu autoritățile universității încă patru ani înainte ca lui Noether să i se permită oficial să predea. Pe perioada schimburilor de scrisori și a hărțuielilor verbale cu administrația, Hilbert i-a păcălit pe birocrați, permițându-i lui Emmy să țină cursuri anunțate oficial sub numele lui.

Noether a demonstrat teorema[16] ce-i poartă numele în 1915, la puțin timp de la sosirea ei la Göttingen. Ea a început prin a examina simetrii continue. Acestea sunt simetrii obținute ca urmare a unor transformări ce pot fi variate continuu, cum ar fi rotațiile (unde unghiul de rotație poate fi schimbat continuu). Simetria unei sfere, spre exemplu, se menține la rotații arbitrar de mici, spre deosebire de cea a unui fulg de zăpadă, care rămâne simetric numai atunci când este rotit cu multipli de 60°. Rezultatul pe care l-a obținut Noether era amețitor. Ea a arătat că *fiecărei simetrii continue a legilor fizicii îi corespunde o lege de conservare și viceversa.* În particular, familiara simetrie a legilor față de translații corespunde conservării momentului cinetic, simetria față de trecerea timpului (faptul că legile nu se schimbă cu timpul) ne dă conservarea energiei, iar simetria față de rotații produce conservarea momentului unghiular. Momentul unghiular este o mărime ce caracterizează modificarea unghiului de rotație a unui obiect sau sistem (pentru un obiect punctiform, el este produsul dintre distanța față

de axa de rotație și momentul cinetic). O manifestare a conservării momentului unghiular se poate vedea în patinajul artistic – atunci când își lipește brațele de corp, patinatoarea se rotește mai iute.

Teorema lui Noether contopea simetriile și legile de conservare – acești doi giganți stâlpi ai fizicii nu sunt în realitate nimic altceva decât fațete diferite ale aceleiași proprietăți fundamentale.

Odată cu luarea puterii de către naziști, Noether, ai cărei părinți erau amândoi evrei, a fost silită să părăsească Germania, așa că s-a mutat la Bryn Mawr College, în Statele Unite. Ea a continuat să predea la Bryn Mawr și la Princeton până la moartea ei, survenită în 1935, în urma unei intervenții chirurgicale. În mesajul său memorial, specialistul în fizică matematică Hermann Weyl făcea aluzie la izolarea pe care a trebuit să o îndure Emmy din pricina sexului: „Dacă noi, la Göttingen, ne refeream adeseori la ea zeflemitor folosind formularea « der Noether » (cu articolul masculin), aceasta era și cu o respectuoasă recunoaștere a puterii ei de gânditor creator, ce părea a fi trecut peste bariera sexului."

Simetriile pe care le-am întâlnit până acum au fost legate de o schimbare a punctului nostru de vedere în spațiu și timp. Multe dintre simetriile privitoare la particulele elementare și forțele de bază ale naturii sunt de un tip diferit – ne schimbăm perspectiva asupra identității particulelor. Acest lucru poate suna alarmant; un electron este întotdeauna un electron, nu-i așa? Nu tocmai, dacă vine vorba de incertitudinea ce domnește în domeniul cuantic.

Nu uitați că singura certitudine din mecanica cuantică este că orice lucru e incert. Numai probabilitățile pot fi determinate cu adevărat. Un electron poate fi nehotărât: nu se rotește clar nici într-un sens, nici în celălalt, ci este într-o stare ambiguă, de rotație ba în sensul acelor de ceas, ba în sens contrar. Mai surprinzător, electronii se pot găsi în niște stări din cauza cărora sunt confundați cu o altă particulă elementară, numită neutrino. Neutrino este o particulă cu masă aproape nulă și fără

sarcină electrică. Exact așa cum luna poate fi plină, nouă sau în oricare altă fază intermediară, și particulele pot purta eticheta de „electron", „neutrino" ori pot fi un amestec din ambele, până când efectuăm o anumită măsurătoare (cum ar fi cea a sarcinii electrice), ce poate face distincția între ele. Conștientizarea acestei capacități a particulelor de a se metamorfoza, trecând dintr-o stare în alta, le-a permis fizicienilor să facă un important pas înainte, spre unificarea tuturor forțelor naturii.

Newton este cel dintâi care a introdus conceptul de unificare. Teoria gravitației unifica forța ce ține picioarele noastre pe sol cu forța ce menține planetele pe orbitele lor. Înaintea lui Newton, nimeni nu bănuia că o singură forță răspunde de ambele. Michael Faraday și James Clerk Maxwell au introdus cea de-a doua unificare majoră – ei au dovedit că forța electrică și cea magnetică sunt, de fapt, aceeași forță, cu înfățișări diferite. Variațiile câmpului electric generează un câmp magnetic și viceversa. Pe lângă forțele gravitațională și electromagnetică, în natură mai distingem și două forțe nucleare. Prima, *forța nucleară tare*, este cea care ține protonii și neutronii în nucleul atomic. Fără ea, protonii ar zbura în toate părțile din pricina respingerii electromagnetice mutuale, astfel încât nu s-ar fi format nicicând un alt element în afară de hidrogen (care n-are decât un proton). *Forța nucleară slabă* răspunde de dezintegrarea radioactivă a uraniului și transformă un neutron într-un proton, creând, în acest proces, un electron și un antineutrino („antiparticula" unui neutrino). Procesul de dezintegrare radioactivă a fost descoperit experimental în 1896, dar asocierea lui cu forța nucleară slabă s-a clarificat abia în anii 1930.

Pe la finele anilor 1960, fizicienii Steven Weinberg, Abdus Salam și Sheldon Glashow au cucerit următoarea frontieră a unificării. Într-o lucrare științifică fenomenală, ei au arătat că forțele electromagnetică și nucleară slabă nu erau nimic altceva decât aspecte diferite ale aceleiași forțe, denumită în consecință *forță electroslabă*. Predicțiile noii teorii erau impresionante. Forța electromagnetică se manifestă atunci când particulele încărcate electric schimbă între ele cuante de energie numite *fotoni*. Fotonul este, de aceea, mesagerul electromagnetismului.

Teoria electroslabă prezicea existența unor rude apropiate ale fotonului, care joacă rolul de mesager pentru forța slabă. Se prefigura că aceste particule nemaivăzute sunt de circa 90 de ori mai masive decât protonul și că există în două variante: încărcate electric (numite W) și neutre (numite Z). Experimente efectuate la consorțiul european pentru cercetare nucleară din Geneva (cunoscut drept CERN, de la Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) au dus la descoperirea particulelor W și Z în 1983, respectiv 1984. (Întâmplător, bine vânduta carte de groază a lui Dan Brown *Îngeri și demoni* a adus cercetarea de la CERN în atenția a milioane de cititori.)

Particulele W și Z sunt de 86, respectiv 97 de ori mai masive decât protonul, exact cum a prezis teoria. Aceasta a fost, neîndoielnic, una dintre poveștile de succes ale simetriei. Glashow, Weinberg și Salam au izbutit să demaște forțele electromagnetică și nucleară slabă descoperind că la baza diferențelor de tărie ale acestor două forțe (forța electromagnetică este de circa o sută de mii de ori mai mare în nucleu) și de masă ale particulelor-mesager stă o remarcabilă simetrie. Forțele naturii sunt aceleași dacă electronii se preschimbă în neutrino sau în orice mixtură a celor două tipuri de particule. Același lucru este adevărat dacă fotonii se preschimbă în mesagerii W și Z ai forței electroslabe. Simetria persistă chiar și dacă mixturile variază de la un loc la altul sau dintr-un moment în altul. Invarianța legilor față de astfel de transformări, survenite în spațiu și timp, a ajuns să fie cunoscută sub denumirea de *simetrie gauge*. În limbaj științific, o *transformare gauge* reprezintă o libertate în formularea unei teorii ce nu are efecte observabile direct – cu alte cuvinte, o transformare față de care interpretarea fizică rămâne insensibilă. Exact așa cum simetria legilor naturii în raport cu orice schimbare a coordonatelor spațio-temporale reclamă manifestarea gravitației, tot așa, simetria gauge dintre electroni și neutrino necesită existența fotonului și a particulelor-mesager W și Z. Încă o dată, dacă problema simetriei este pusă prima, legile se scriu practic singure. Un fenomen similar, în care simetria dictează prezența a noi grupuri de particule, se repetă în cazul forței nucleare tari.

Quarq, gluon, grup

Particulele ce compun nucleele atomice, protonii și neutronii, nu sunt „elementare". Ele sunt compuse din blocuri constructive[17] numite *quarci*. Denumirea de *quarc* a fost aleasă de fizicianul Murray Gell-Mann, în 1963. El s-a hotărât asupra unui cuvânt care combină „a dog's bark" (un lătrat de câine) cu „a seagull's squawk" (un țipăt de pescăruș), inventat de faimosul romancier irlandez James Joyce, în *Finnegans Wake* (*Veghea lui Finnegan*):

Three quarks for Muster
Mark!
Sure he hasn't got much of
A bark
And sure any he had it's all
*Beside the mark.**

Quarcii vin în șase „arome", cărora li s-au dat denumiri destul de arbitrare: sus, jos, straniu, farmec, vârf, fund. Protonii, spre exemplu, sunt compuși din doi quarci sus și un quarc jos, iar neutronii constau în doi quarci jos și un quarc sus. Quarcii nu posedă sarcina electrică obișnuită, ci una de un alt tip, care a fost fantezist numită *culoare*, deși nu are nimic de-a face cu ceva vizibil. În același mod în care sarcina electrică stă la baza forțelor electromagnetice, culoarea este la originea forței nucleare tari. Fiecare aromă de quarc vine în trei culori diferite, numite convențional roșu, verde și albastru. Există, de aceea, 18 quarci diferiți.

Forțele naturii sunt oarbe la culoare. Exact așa cum o tablă de șah infinită ar arăta la fel dacă interschimbăm albul cu negrul, tot așa, forța dintre un quarc verde și unul roșu este aceeași

---

* Trei quarci pentru Muster,
Țintă lovită!
Sigur n-a scos
Ceva aproape de-un lătrat
Și sigur orice-a scos
Nu și-a nimerit ținta (*n. r.*).

ca cea dintre doi quarci albaștri sau dintre un quarc albastru și unul verde. Chiar dacă ar fi să utilizăm întreaga „paletă" a mecanicii cuantice și să înlocuim fiecare dintre stările definite printr-o culoare „pură" cu o stare dată de un amestec de culori (de exemplu cu „galben", reprezentând un amestec de roșu și verde, sau cu „azuriu", pentru un amestec albastru-verde), legile naturii ar rămâne aceleași. Legile rămân simetrice la orice transformare a culorii. Mai mult decât atât, simetria de culoare este tot de tip gauge – legilor naturii le este indiferent dacă aceste culori de bază sau nuanțele rezultate din amestecuri variază de la o poziție la alta sau de la un moment la următorul.

Am văzut deja că simetria gauge ce caracterizează forța electroslabă – libertatea de a interschimba electronii și neutrino – dictează existența unor particule-mesager electroslabe (foton, W și Z). Similar, simetria gauge față de culoare reclamă prezența a opt grupuri de *gluoni*. Gluonii sunt mesagerii forței tari ce leagă quarcii pentru a forma particule compuse, cum ar fi protonul. Apropo, „sarcinile" de culoare ale celor trei quarci ce alcătuiesc un proton sau un neutron sunt toate diferite (roșu, albastru, verde) și ele se însumează pentru a da sarcina de culoare zero sau „alb" (echivalentă cu neutralitatea electrică în electromagnetism). Deoarece simetria de culoare stă la baza forțelor dintre quarci – forțe mediate de gluoni –, teoria acestora a devenit cunoscută drept *cromodinamica cuantică*. Mariajul teoriei electroslabe (care descrie forțele electromagnetice și nucleare slabe) cu cromodinamica cuantică (care descrie forța nucleară tare) a produs *modelul standard* – teoria de bază a particulelor elementare și a legilor fizice ce le guvernează.

Dacă începeți să vă simțiți un pic amețiți de la toate aceste particule elementare diferite, să știți că nu sunteți singurii. Faimosul fizician Enrico Fermi (1901–1954), care era considerat „ultimul savant universal" (în sensul de cunoscător al tuturor domeniilor fizicii), este citat că ar fi zis odată: „Dacă mi-aș putea aminti numele tuturor acestor particule [pe departe mai puține decât cele cunoscute în prezent], aș fi botanist." Câteva dintre ciudatele proprietăți ale particulelor elementare au pătruns chiar și în cultura populară. Fiziciana și scriitoarea

Cindy Schwarz a compilat o întreagă colecție[18] de proză și poezie despre particulele elementare, scrise de studenți de la Vassar College. Un astfel de poem, de Vanessa Pepoy, se intitulează „Cromodinamică“:

Roșu verde albastru
Trinitate de culori.
Fundamentale.
Organizaționale.
Principiu
Conținut într-o
Particulă,
Lumină albă
Invizibilă.

Ați observat, poate, că particulele implicate în simetriile gauge tind să formeze familii de rude foarte apropiate (de exemplu, protonii și neutronii). Istoricește vorbind, chiar și mai înainte de sugestia că protonii și neutronii sunt compuși din câte trei quarci ce schimbă între ei gluoni, fizicienii au remarcat izbitoare similarități între acești doi vecini intranucleari. Nu numai că sunt foarte apropiați ca masă, dar și forța tare dintre ei este aceeași, indiferent dacă acționează între doi neutroni, un neutron și un proton sau oricare două stări intermediare ale celor doi. Odată cu apariția acceleratoarelor de particule de înaltă energie, în anii 1950, o întreagă grădină zoologică pare a se fi ivit. Încercând să pună într-o oarecare ordine menajeria ce prolifera rapid, Murray Gell-Mann și fizicianul israelian Yuval Ne'eman au remarcat că protonii și neutronii erau foarte asemănători cu alte șase particule. Ei au mai identificat și alte astfel de familii lărgite, de opt sau zece membri. Gell-Mann a numit această simetrie „optuplul drum“, făcând aluzie la cele opt principii din calea budistă a autodezvoltării, ce se presupune că duce la sfârșitul suferinței. Conștientizarea faptului că simetria este cheia pentru înțelegerea proprietăților particulelor subatomice a condus la o întrebare inevitabilă: Există vreun mod eficient de caracterizare a tuturor acestor simetrii ale legilor naturii? Sau, mai specific, care este teoria de bază a transformărilor ce pot schimba continuu un

amestec de particule într-altul, ducând la formarea familiilor observate? Probabil că ați ghicit deja răspunsul. Profundul adevăr al frazei pe care am citat-o mai înainte s-a revelat încă o dată: „Ori de câte ori grupurile s-au dezvăluit singure sau au putut fi introduse, simplitatea s-a cristalizat din haos." Fizicienii din anii 1960 se înfiorau descoperind că matematicienii neteziseră deja drumul. Exact așa cum, cu o jumătate de secol mai înainte, Einstein aflase de trusa de instrumente geometrice pregătită de Riemann, tot așa, Gell-Mann și Ne'eman au dat peste impresionanta lucrare de teoria grupurilor a lui Sophus Lie. Ideile lui Lie au devenit atât de importante[19] pentru fizica energiilor înalte încât se cuvin câteva cuvinte despre acest excepțional matematician.

Figura 95

Sophus Lie (figura 95) a ajuns la matematică[20] pe un drum oarecum ocolit. La Universitatea „Regele Fredrik" din Christiania (Oslo de azi) el nu a demonstrat nici o pasiune deosebită pentru această disciplină și nici o capacitate ieșită din comun, deși studiase lucrările lui Abel și Galois. Unul dintre dascălii săi, Ludvig Sylow (1832–1918), el însuși un faimos matematician, a mărturisit mai târziu că n-ar fi ghicit niciodată că tânărul Lie avea să devină una dintre cele mai luminate minți matematice ale secolului. Și totuși, după câțiva ani de ezitare, timp în care a fost bântuit de idei sinucigașe, Lie a început să se intereseze din ce în ce mai mult de matematică. În 1868, el a ajuns în sfârșit la concluzia că „exista un matematician ascuns în mine".

În timpul unor voiaje făcute la Berlin și la Paris în 1869 și 1870, Lie s-a întâlnit și s-a împrietenit cu Felix Klein. La Paris, el l-a cunoscut și pe Camille Jordan (1838–1922), care l-a convins că teoria grupurilor ar putea juca un rol crucial în studiul geometriei. Eforturile combinate ale lui Lie și Klein în această

arenă au procurat semințele pentru celebrul Program de la Erlangen al lui Klein, asupra caracterizării geometriei pe baza teoriei grupurilor.

În 1870, evenimente politice au complicat colaborarea dintre cei doi tineri matematicieni. Izbucnirea războiului dintre Franța și Prusia l-a silit pe Klein să părăsească Parisul, pentru a se îndrepta spre Berlin. Lie a încercat s-o ia spre Italia pe jos, dar n-a ajuns decât până la Fontainbleau, unde a fost arestat. Pentru conducătorii armatei franceze, densele studii matematice ale norvegianului semănau, desigur, cu niște mesaje codate ale unui spion german. Din fericire pentru Lie, matematicianul francez Gaston Darboux a intervenit și l-a eliberat din închisoare. Doi ani mai târziu, Universitatea din Christiania nu a repetat greșeala pe care o făcuse cu Abel. Facultatea și oficialii i-au recunoscut neobișnuitele talente și au creat o catedră de matematică pentru el. Lie a continuat să colaboreze intermitent cu Klein până în 1892, când între ei a izbucnit o ceartă urâtă. Parțial, aceasta fusese cauzată de impresia lui Lie că nu i se recunoscuse cum se cuvenea rolul în elaborarea Programului de la Erlangen. În 1893, el a emis o declarație în care îl ataca public pe Klein. Printre altele spunea: „Nu sunt elevul lui Klein și nici invers, deși ultimul caz ar putea fi mai aproape de adevăr.“ Klein n-a contribuit la îmbunătățirea situației atrăgând atenția (de presupus că în „apărare“ față de acțiunile lui Lie) asupra problemelor mintale de care suferise Lie la sfârșitul anilor 1880. Dar aceste evenimente nu afectează genialitatea lui Lie.

Cei doi giganți norvegieni din ultima parte a secolului al nouăsprezecelea, Lie și Sylow, și-au recunoscut pe deplin datoria intelectuală față de strălucita stea a matematicii norvegiene – Abel. Vreme de opt ani, ei și-au asumat migăloasa sarcină de a pregăti și publica operele complete ale acestuia. Cam în aceeași perioadă, Lie a început să lucreze la grupurile de transformări continue (cum ar fi translațiile și rotațiile din spațiul obișnuit). Acest proiect a culminat cu publicarea, între 1888 și 1893, a unei teorii lărgite și a unui catalog detaliat de astfel de grupuri (în colaborare cu matematicianul german

Friedrich Engel). Membrii clasei de grupuri continue studiate de Lie au ajuns ulterior să fie cunoscuți sub denumirea de *grupuri Lie*.

Grupurile Lie erau exact instrumentele de care aveau nevoie Gell-Mann și Ne'eman pentru a caracteriza schema generală ce stătea la baza nou-descoperitei grădini zoologice de particule. Spre deliciul lor, cei doi fizicieni au descoperit că matematicianul german Wilhelm Killing (1847–1923) și matematicianul francez Elie-Joseph Cartan (1869–1951) le făcuseră munca și mai ușoară. Să ne amintim că, pentru demonstrația sa privind rezolvabilitatea ecuațiilor, Galois a definit niște subgrupuri particulare care se numesc normale (Capitolul 6). Dacă un grup nu are subgrupuri normale (altele decât cele două subgrupuri triviale, unul compus numai din transformarea identică și celălalt reprezentat de grupul însuși), el se numește *simplu*. Grupurile simple sunt blocurile constructive de bază ale teoriei grupurilor, în același sens în care numerele prime (divizibile numai cu ele însele și cu 1) sunt blocurile constructive ale tuturor numerelor întregi. Cu alte cuvinte, toate grupurile pot fi construite din grupuri simple, iar grupurile simple nu pot fi descompuse mai departe printr-un proces similar. Killing a schițat clasificarea grupurilor Lie simple în 1888; clasificarea a fost completată și perfecționată de Cartan în 1894. Există patru familii infinite de grupuri Lie simple și cinci grupuri simple *excepționale* (sau *sporadice*), care nu se potrivesc în nici una dintre cele patru familii. Gell-Mann și Ne'eman au descoperit că un astfel de grup Lie simplu, numit „grup unitar special de grad 3" sau SU(3), se potrivea de minune cu „optuplul drum" – structura de familie de care se descoperise că ascultă particulele. Frumusețea simetriei SU(3) era dezvăluită de puterea sa predictivă. Gell-Mann și Ne'eman au arătat că, dacă teoria era adevărată, trebuia găsit un al zecelea membru anterior necunoscut al unei familii particulare de nouă particule. Extensiva vânătoare a particulei lipsă s-a desfășurat în 1964, printr-un experiment cu acceleratorul de la Brookhaven National Lab, de pe Long Island. Yuval Ne'eman mi-a spus câțiva ani mai târziu că, auzind că fuseseră deja analizate

o jumătate dintre date fără a fi descoperită particula anticipată, se gândise serios să părăsească definitiv fizica. Simetria a triumfat până la urmă – particula lipsă (numită omega minus) a fost găsită și avea exact proprietățile prezise de teorie.

Toate simetriile ce caracterizează modelul standard (de exemplu, simetria schimbului de culori între quarci) pot fi reprezentate ca produse de grupuri Lie simple. Încercarea de pionierat de a descrie matematic astfel de simetrii fizice a fost făcută de fizicienii Chen Ning Yang și Robert Mills, în 1954. Pe bună dreptate, ecuațiile ce descriu forța nucleară slabă (în analogie cu ecuațiile lui Maxwell, care descriu electromagnetismul) se numesc ecuațiile Yang-Mills. Prin lucrările lui Weinberg, Glashow și Salam asupra teoriei electroslabe și elegantul cadru de lucru elaborat de fizicienii David Gross, David Politzer și Frank Wilczek pentru cromodinamica cuantică, grupul caracteristic al modelului standard a fost identificat cu un produs de trei grupuri Lie notate cu U(1), SU(2) și SU(3). Într-un anume sens, de aceea, drumul spre definitiva unificare a forțelor naturii trebuie să treacă prin descoperirea celui mai convenabil grup Lie ce conține produsul $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

Experiența cu relativitatea restrânsă și generală, precum și modelul standard al particulelor elementare nu pot conduce decât la o singură concluzie. Simetria și teoria grupurilor au un tulburător mod de a-i îndrepta pe fizicieni pe drumul cel bun. Acest lucru poate părea oarecum surprinzător la prima vedere, fiindcă cerința de simetrie impune constrângeri destul de rigide. Așa cum am văzut, odată ce un motiv repetat la infinit într-o dimensiune este obligat să asculte de simetriile mișcărilor corpurilor rigide, nu sunt permise decât șapte motive distincte de șiruri de elemente. Chiar și în două dimensiuni, se poate demonstra că motivele repetitive de „tapet de hârtie" sunt limitate la 17[21]. Restricții similare sunt impuse oricărei teorii ce încorporează simetria. Dar oare nu stânjenesc aceste constrângeri libertatea pe care, altminteri, ar putea-o avea teoria? Desigur că da, iar această interdicție este un rezultat dorit. Fizicienii sunt în căutarea unei *unice* teorii care să explice

universul, nu a mai multora, toate făcând treaba la fel de bine. Dacă în Capitolul 5 v-aș fi prezentat douăzeci și trei de teorii diferite cu privire la moartea lui Galois, toate pe deplin compatibile cu dovezile de care dispunem, probabil că n-ați fi fost foarte satisfăcuți. Simetria ne ajută nu numai să evităm starturi greșite și alei înfundate, ci și să traversăm cele mai dificile părți, fazele de „decizii peste decizii" ce caracterizează alegerile.

Biblia ne spune că, după ce au părăsit Egiptul, israeliții[22] au fost călăuziți prin deșert de „un stâlp de foc noaptea, ca să le dea lumină". Simetria a fost stâlpul de foc al oamenilor de știință, conducându-i către relativitatea generală și modelul standard. Îi poate ea oare conduce și la unificarea celor două?

Armonia stringurilor

Istoricilor le place să ne atragă atenția că, judecate retrospectiv, anumite revoluții sociale au fost niște eșecuri. Prin contrast, cele două revoluții științifice ale secolului XX au fost indiscutabile succese. Relativitatea generală a prezis curbarea luminii în jurul corpurilor cosmice, fenomenul de colaps, reprezentat de găurile negre, și expansiunea universului, toate acestea fiind confirmate prin observații. Teoria cuantică a fost confirmată în electrodinamică cu o uimitoare precizie, iar giuvaierul său de coroană – modelul standard – a surprins și a prezis cu succes toate proprietățile particulelor subatomice cunoscute. Aici, totuși, este o problemă. Avem o teorie extrem de reușită la scară astronomică (stele, galaxii, univers) și o alta la scară subatomică (atomi, quarci, fotoni). Acest lucru ar putea fi în regulă dacă cele două lumi n-ar avea să se întâlnească niciodată. Dar într-un univers care și-a început expansiunea pornind de la un Big Bang[23] – o stare extrem de compactă și teribil de fiebinte –, era inevitabil ca drumurile relativității generale și mecanicii cuantice să se întretaie. Numeroase dovezi, cum ar fi formarea elementelor din tabloul periodic, indică faptul că și „marele" a fost cândva mic. Mai mult decât atât, unele entități, ca găurile negre, trăiesc atât în domeniul astronomic, cât și în

cel cuantic. Drept consecință, mergând pe urmele încercărilor nereușite ale lui Einstein de a uni relativitatea generală cu electromagnetismul, mulți fizicieni s-au angajat în cel mai mare efort de unificare care a fost făcut vreodată – cel al relativității generale cu mecanica cuantică.

Obstacolul major ce a afectat dintotdeauna strădaniile de unificare a fost reprezentat de simplul fapt că, la suprafață, relativitatea generală și mecanica cuantică par realmente[24] incompatibile. Conceptul-cheie al teoriei cuantice este, după cum am mai spus, principiul incertitudinii. Atunci când încercăm să probăm pozițiile cu o putere de mărire mereu crescută, momentele (sau vitezele) încep să oscileze violent. Sub o anumită lungime minusculă, cunoscută sub denumirea de *lungimea lui Planck*, întreaga idee de spațiu-timp neted se pierde. Această lungime (egală cu $1{,}616012 \times 10^{-35}$ metri) determină scara la care gravitația trebuie tratată în termeni de mecanică cuantică. Pentru scări mai mici, spațiul se transformă într-o veșnic fluctuantă „spumă cuantică". Dar chiar premisa fundamentală a relativității generale fusese existența unui spațiu-timp ce se curbează delicat. Cu alte cuvinte, *ideile centrale ale relativității generale și mecanicii cuantice se ciocnesc ireconciliabil dacă se ajunge la scări extrem de mici*.

Cel mai bun pariu actual pentru o teorie cuantică a gravitației pare a fi o versiune a *teoriei stringurilor*. Conform cu această revoluționară teorie, particulele elementare nu sunt entități punctiforme fără structură internă, așa cum ar vrea să ne facă să credem modelul standard, ci minuscule stringuri (bucle de coarde vibratoare). Aceste bucle infinit de subțiri, ca niște benzi de cauciuc, sunt așa de mici (de ordinul lungimii lui Planck; circa de o sută de miliarde de ori mai mici decât protonul), încât pentru puterea de separare a aparatelor din zilele noastre ele apar ca niște puncte. Frumusețea principalei idei a teoriei stringurilor este aceea că toate particulele elementare cunoscute sunt considerate a reprezenta doar moduri de vibrație diferite ale unui aceluiași string de bază. Exact așa cum o coardă de vioară sau de chitară poate fi ciupită pentru a produce diferite armonii, diferitele motive vibraționale ale stringului

de bază corespund unor particule de materie distincte, ca electronii și quarcii. Același lucru este valabil și pentru purtătorii forței. Particulele-mesager, ca gluonii sau W și Z, își datorează existența altor armonii. Simplu spus, toate particulele de materie și forță ale modelului standard sunt parte a repertoriului pe care-l pot interpreta stringurile. Cel mai impresionant, totuși, este că s-a găsit că o configurație particulară de string are proprietăți ce se potrivesc exact cu *gravitonul* – mesagerul anticipat al forței gravitaționale. Aceasta era pentru prima oară când cele patru forțe fundamentale ale naturii erau adăpostite, chiar și numai cu titlu de încercare, sub același acoperiș.

S-ar putea crede că o realizare de o asemenea importanță – Sfântul Graal al fizicii moderne – ar fi imediat aclamată de întreaga comunitate științifică. Totuși, reacția pe la mijlocul anilor 1970 a fost alta. Anii de frustrare pierduți cu încercările de a unifica relativitatea generală cu mecanica cuantică construiseră un zid gros de scepticism. Afirmația fizicienilor John Schwarz, de la California Institute of Technology, și Joël Scherk[25], de la École Normale Supérieure din Paris, că teoria stringerilor unește în sfârșit gravitația cu forța nucleară tare era universal ignorată. Această situație a persistat vreme de peste un deceniu. În această perioadă, aproape fiecare pas înainte era imediat urmat de descoperirea vreunei subtile dificultăți, rezultatul fiind nouă zecimi de pas înapoi. Epocalul progres a fost făcut în 1984[26], când fizicienii Michael Green, pe atunci la Queen Mary College, și John Schwarz au demonstrat că teoria stringurilor ar putea asigura cu adevărat definitiva unificare pe care o căuta toată lumea. O frenetică activitate s-a dezlănțuit, unii dintre cei mai mari teoreticieni angajându-se într-o goană după ce apărea a fi căutarea „teoriei a tot ce există" – fundația cea mai adâncă pe care putea fi construit restul fizicii. Așa cum este adeseori cazul în știință, valul de entuziasm (poreclit „prima revoluție superstring") a lăsat însă curând locul unei faze de muncă grea, plină de frustrări. Spre deosebire de cazul lui SU(3), unde toate instrumentele matematice existau deja, așteptând ca fizicienii să facă uz de ele, teoreticienii stringurilor trebuiau să elaboreze din mers matematica necesară.

Cu toate acestea, așa cum vom vedea în secțiunea următoare, grupurile ofereau încă limbajul corect pentru a descrie schemele subiacente.

Dar cum își propune teoria stringurilor să rezolve[27] conflictul fundamental dintre geometria „netedă" a relativității generale și violentele fluctuații ale mecanicii cuantice? Atribuind o oarecare incertitudine chiar și dimensiunilor spațiu-timp, similară celei pe care mecanica cuantică o conferă pozițiilor și mișcărilor particulelor.

Să ne imaginăm că vrem să desenăm un nor. Dacă norul de pe cer pe care-l alegem drept model este relativ îndepărtat, aproape de orizont, putem, probabil, reproduce destul de precis forma pe care o observăm. Dacă, pe de altă parte, norul este relativ aproape, devine tot mai dificil să imortalizăm contururile sale în permanentă schimbare. Utilizarea unui sistem optic de mărire, permițându-ne să vedem până la scară submoleculară, ar face orice încercare de reproducere să fie lipsită de speranță. Teoria stringurilor afirmă că, tratând particulele elementare și mesagerii de forță drept obiecte punctiforme adimensionale, fizica încerca să cerceteze universul la scări aflate sub limita inteligibilă. Cu alte cuvinte, deoarece stringurile, cei mai de bază constituenți ai universului, sunt obiecte cu o oarecare lungime, de ordinul celei a lui Planck, distanțele mai mici decât lungimea lui Planck sunt în afara domeniului fizicii. Concentrându-ne numai asupra unor scări cu unități de măsură mai mari decât lungimea lui Planck, putem elimina violentele fluctuații și evita conflictul. Deloc surprinzător, doza de incertitudine din cadrul de lucru al teoriei stringurilor schimbă natura evenimentelor din spațiu-timp. Deși, în modelul standard, orice interacțiune dintre două particule apare într-un punct bine definit din spațiu-timp, lucru cu care sunt de acord toți observatorii, situația din teoria stringurilor este diferită (figura 96). Datorită lungimii pe care o au

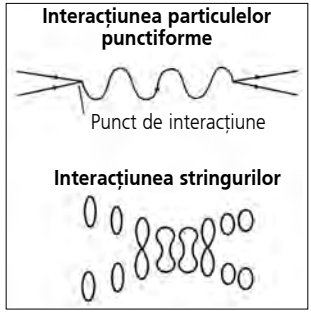


Figura 96

stringurile, nu putem spune precis când și unde interacționează ele. Atât locul cât și timpul interacțiunii sunt „șterse". Situația poate fi asemănată (numai superficial) cu incapacitatea noastră de a prezice când și unde se va rupe un iadeș tras de ambele capete.

Abia revenindu-și după revoluția prin care a trecut înțelegerea spațiului-timp datorită relativității lui Einstein, fizicienii trebuiau să se adapteze la noile concepte introduse de revoluția stringurilor. Din fericire, conceptul nostru familiar nu numai că a supraviețuit acestei revoluții, dar a ajuns și în perioada sa de glorie datorită teoriei stringurilor.

Nu doar simetrie – supersimetrie

Legile naturii nu depind de loc, unghi sau moment. Ele sunt simetrice față de translații, rotații și trecerea timpului. Ele sunt, de asemenea, identice pentru toți observatorii, indiferent dacă aceștia se află în mișcare uniformă sau accelerată. Aceasta este esența principiului covarianței generale, formulat de Einstein. Așa cum observatorii care se mișcă uniform pot crede că sunt în repaus, orice în jurul lor fiind în mișcare, același lucru îl pot face și observatorii aflați în mișcare accelerată. Aceștia din urmă sunt perfect îndreptățiți să susțină că forțele suplimentare pe care le simt se datorează unui câmp gravitațional (conform cu principiul echivalenței). Prin anul 1967, fizicienii gândeau că nu pot exista alte simetrii decât acelea asociate cu schimbarea poziției noastre privilegiate din spațiu și timp. De fapt, exista chiar și o teoremă[28] care susținea că demonstrează acest lucru. Spre surpriza multor fizicieni, cercetarea intensă din următorii patru ani a dus la descoperirea că mecanica cuantică permite o simetrie suplimentară. Această neașteptată simetrie a fost denumită *supersimetrie*.

Supersimetria este o simetrie subtilă[29], bazată pe conceptul de spin din mecanica cuantică. Ne aducem aminte (din Capitolul 1) că spinul electronului este o proprietate intrinsecă, la fel ca și sarcina sa electrică, ce seamănă în anumite privințe cu clasicul moment unghiular – ca și cum electronul s-ar roti în

jurul axei sale. Spre deosebire de corpurile ce se rotesc în sens clasic, ca un titirez, cu viteză mare sau mică, electronii au totdeauna numai un spin, bine determinat. În unitatea cu care se măsoară acest spin în mecanica cuantică (numită *constanta lui Planck*), electronii au o jumătate de unitate sau sunt particule cu „spin 1/2". De fapt, toate particulele de materie din modelul standard – electroni, quarci, neutrino și două alte tipuri numite mezoni și tauoni – toate au „spin 1/2". Particulele cu spin 1/2 se numesc *fermioni* (după fizicianul italian Enrico Fermi). Pe de altă parte, purtătorii de forță – fotonul, W, Z și gluonii – toți au o unitate de spin sau sunt particule cu „spin 1" în argoul fizicii. Purtătorul de gravitație – gravitonul – are „spin 1", aceasta fiind exact proprietatea identificatoare descoperită la unul dintre stringuri. Toate particulele cu unități întregi de spin se numesc *bozoni* (după fizicianul indian Satyendra Bose). Așa cum spațiul-timp obișnuit este asociat cu simetria față de rotații, spațiul-timp din mecanica cuantică este asociat cu supersimetria bazată pe spin. Predicțiile supersimetriei, dacă sunt ascultate cu adevărat, sunt pline de consecințe. Într-un univers bazat pe supersimetrie, *orice particulă cunoscută din univers trebuie să aibă un partener încă nedescoperit* (sau „superpartener"). Particulele materiale cu spin 1/2, ca electronii și quarcii, trebuie să aibe superparteneri cu spin 0. Fotonii și gluonii (cu spin 1) trebuie să aibă superparteneri cu spin 1/2, numiți *fotino*, respectiv *gluino*. Mai important însă, încă din anii 1970, fizicienii și-au dat seama că singurul mod în care teoria stringurilor putea include motive fermionice de vibrație (putând, astfel, să explice constituenții materiei) era acela ca teoria să fie supersimetrică. În versiunea supersimetrică a teoriei, motivele vibraționale bozonice și fermionice vin inevitabil în perechi. Mai mult decât atât, teoria supersimetrică a stringurilor a reușit să evite o altă mare bătaie de cap, care fusese asociată cu formularea originală (nesupersimetrică) – particulele cu masă imaginară. Amintiți-vă că rădăcinile pătrate ale numerelor negative se numesc numere imaginare. Înainte de supersimetrie, teoria stringurilor producea un straniu motiv de vibrație (numit *tahion*) a cărui masă

era imaginară. Fizicienii au scos un oftat de ușurare atunci când supersimetria a eliminat aceste nedorite bestii.

Nu mai este nevoie să spunem că toate simetriile și motivele subiacente ale versiunilor curente ale teoriei stringurilor sunt descrise de grupuri. O versiune, spre exemplu, cunoscută sub intimidantul nume de *tipul heterotic* $E_8 \times E_8$, se bazează pe unul dintre grupurile Lie sporadice.

Următorul pas critic în confirmarea sau respingerea teoriei stringurilor va fi, desigur, acela de a putea descoperi particulele supersimetrice prezise. Fizicienii speră că acest lucru este posibil cu acceleratorul denumit Large Hadron Collider (LHC) de la CERN. Cam prin 2007, ne așteptăm ca acest cel mai mare accelerator din lume să atingă energii de aproape opt ori mai mari decât cele realizabile în momentul scrierii acestei cărți. Dacă se găsesc într-adevăr superparteneri, proprietățile lor vor furniza indicii cruciale cu privire la forma definitivă a teoriei. Dacă ei nu sunt găsiți, aceasta ar putea fi o indicație că teoria merge într-o direcție complet greșită.

Teoria stringurilor progresează într-un ritm atât de incredibil, încât orice persoană neimplicată direct în studiul ei găsește că e foarte dificil să o urmărească în detaliu. Cercetarea curentă continuă să aibă în avangarda ei pe Edward Witten de la Institutul pentru Studii Avansate de la Princeton și pe mulți alții, prea numeroși pentru a-i numi aici. Matematica utilizată în aceste studii devine tot mai complexă. Nu numai că numerele obișnuite sunt înlocuite de o clasă mai largă de numere cunoscute sub denumirea de *numere Grassmann*[30] (după matematicianul prusac Hermann Grassmann), dar și geometria obișnuită este depășită de o ramură specială, numită *geometrie necomutativă*, care a fost elaborată de matematicianul francez Alain Connes.

În pofida instrumentelor ultramoderne ce și-au pus amprenta asupra ei, teoria stringurilor este, de fapt, în etapa copilăriei. Unul dintre pionierii săi, fizicianul italian Daniele Amati, a caracterizat-o drept „parte a secolului al XXI-lea care a căzut din întâmplare în secolul XX". Într-adevăr, există ceva în însăși natura teoriei, așa cum este ea în prezent, care ne atrage atenția

asupra faptului că suntem martorii pașilor unui bebeluș. Să ne reamintim de lecția învățată de pe urma tuturor marilor idei apărute de la relativitatea lui Einstein încoace – *puneți simetria pe primul loc*. Simetria este la originea forțelor. Principiul echivalenței – speranța că toți observatorii, indiferent de mișcările lor, vor deduce aceleași legi – *reclamă* existența gravitației. Simetriile gauge – faptul că legile nu disting culoarea sau electronii de neutrino – *dictează* existența mesagerilor forțelor tare și electroslabă. Și totuși, supersimetria este un rezultat al teoriei stringurilor, o consecință a structurii sale, mai curând decât o sursă a existenței sale. Ce înseamnă aceasta? Mulți teoreticieni ai stringurilor cred că un principiu mai cuprinzător, care va necesita existența teoriei stringurilor, încă rămâne să fie găsit. Dacă este să se repete istoria, acest principiu ar putea să implice o simetrie atotcuprinzătoare și chiar mai constrângătoare, dar în acest moment nimeni n-are vreo idee care ar putea fi acest principiu. Fiindcă, totuși, nu suntem decât la începutul secolului al XXI-lea, caracterizarea făcută de Amati se poate încă dovedi a fi o uimitoare profeție.

Așa cum ați văzut în acest capitol, fizicienii au ridicat simetria până la poziția de concept central în încercările lor de a organiza și explica un univers altminteri complex și năucitor. Acest fapt ridică unele întrebări interesante. Prima, de ce găsim atât de atrăgătoare simetria? A doua, poate și mai dificilă, sunt cu adevărat inevitabile explicațiile de teoria grupurilor bazate pe simetrie? Sau, este oare creierul uman făcut să sesizeze numai aspectele simetrice ale universului? Pentru a înțelege de ce ne atrage simetria atât de mult, trebuie să pricepem cum afectează ea mintea umană.

8
Cine-i cel mai simetric dintre toți?

Cât timp credeți că ați putea purta o conversație civilizată cu omul din figura 97 înainte ca poziția strâmbă a ochelarilor să vă scoată din pepeni? Sau să presupunem că intrați în casa cuiva și descoperiți că tablourile atârnate pe pereți sunt „aranjate" așa cum se vede în figura 98. N-ați dori instinctiv să le îndreptați? Cum și de ce s-a dezvoltat această nevoie de simetrie bilaterală în mintea omenească? Unul dintre scopurile psihologiei evoluționiste este de a răspunde tocmai unor întrebări de acest tip.

Psihologia evoluționistă este o știință[1] care încearcă să combine tot ce-i mai bun în cele două lumi – biologia evoluționistă și psihologia cognitivă. În această concepție, mintea omenească este realmente o colecție de numeroase module specializate, care au fost proiectate și modelate de selecția naturală pentru a rezolva probleme de adaptare foarte particulare. Problema de adaptare este orice provocare pusă de mediul ambiant, la care mințile strămoșilor noștri umani aveau nevoie să se ridice pentru ca aceste creaturi bipede să supraviețuiască și să se reproducă cu succes. Cu alte cuvinte, potrivit pionierilor psihologiei evoluționiste Leda Cosmides și John Tooby, mintea omenească seamănă puțin cu un cuțit militar elvețian, cu multe „chițibușuri" diferite,

Figura 97

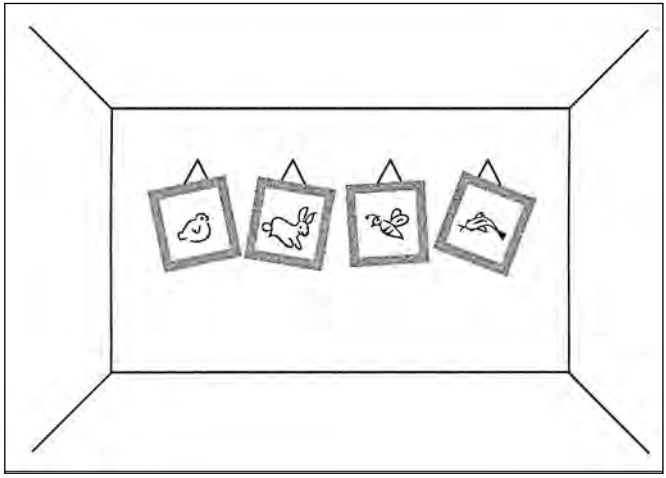


Figura 98

fiecare dintre ele proiectată pentru o sarcină diferită. Psihologii evoluționiști resping ideea proceselor mintale cu scop mai general. Ei argumentează convingător că toate problemele cu care s-au confruntat vreodată hominizii erau mai degrabă de natură particulară decât generală.

Indicii venind dintr-o diversitate de domenii, de la biologie și antropologie până la arheologie și paleontologie, sugerează care au fost cele mai cruciale probleme de adaptare. În termeni largi, acestea includ scăparea de prădători, identificarea hranei bune, formarea alianțelor, sprijinirea urmașilor și a rudelor apropiate, comunicarea cu alți oameni și alegerea tovarășilor de viață. Unde intervine simetria în toate astea?

Înfricoșătoarea simetrie

Puțini s-ar putea întrece cu Oscar Wilde în replici spirituale. În *Portretul lui Dorian Grey*, el declară: „Un om nu poate fi niciodată prea atent la alegerea dușmanilor săi.“ Lăsând gluma deoparte, dintr-un punct de vedere evoluționist, aceasta

este o observație foarte perspicace. Genele nu-și pot îndeplini una dintre principalele lor sarcini – de a trece intacte la generația următoare – dacă purtătorul lor se lasă devorat de un animal de pradă. Orice gene care ajută cumva un animal să scape de prădători ar fi, de aceea, inevitabil favorizate de selecția naturală. Astfel de gene ar participa la construcția evoluționistă a „modulelor de evitare a prădătorilor". Sarcinile acestor module sunt destul de evidente. În primul și în primul rând, trebuie detectați potențialii prădători. Fără o detecție timpurie, nu se poate întreprinde nici o acțiune, iar consecințele sunt catastrofale. Numai în etapele ulterioare este necesară activarea celorlalte funcții – pericolele reale trebuie deosebite de alarmele false, iar reacțiile, declanșate corespunzător. Drept urmare, este nevoie ca modulele de evitare a prădătorilor să fie în primul rând dispozitive de detectare a lor.

Numeroase exeperimente arată că sistemele de percepție ale multor creaturi, de la albine și porumbei până la oameni, sunt foarte sensibile la simetrie bilaterală. Modelele simetrice sunt detectate mai iute decât cele asimetrice și sunt mai ușor asimilabile și recuperabile din memorie. Această capacitate întâlnită la toate speciile, poate fi cumva legată de nevoile de evitare a prădătorilor? Care era problema adaptivă precisă[2] pe care echipamentul perceptual încerca s-o rezolve? O indicație privitoare la răspuns ar putea fi culeasă punând întrebarea în mod diferit: Într-o lume lipsită de biserici, mașini, avioane și alte realizări umane, ce arată bilateral simetric? Răspunsul este evident ca și nasul de pe propria față – animalele și oamenii! De fapt, deși spatele unui leu este și el bilateral simetric, simetria aceasta nu este la fel de izbitoare ca cea observabilă din față. Cu alte cuvinte, detectarea simetriei bilaterale se traduce pentru un animal, mai mult sau mai puțin, în „Sunt supravegheat". Nu-i neapărat nevoie ca intențiile celui care supraveghează să fie rele – el s-ar putea, pur și simplu, să se bucure de priveliște sau să-și caute o pereche. Dar nu încape vorbă că detectarea timpurie a simetriei bilaterale ar putea face diferența dintre viață și moarte pentru subiecții aflați „în vizor".

Neurologul Joseph LeDoux, de la Centrul pentru Științe Neurale al Universității din New York, este unul dintre pionierii studierii emoțiilor ca fenomene pur fiziologice, nu comportamentale. Pe LeDoux nu-l interesează sentimentele complexe, ca amestecul de dragoste și aversiune sau zbaterea conștientă la care duce interacțiunea dintre dorință și gelozie. El studiază circuitele din creier care transmit sentimentul de teamă[3]. LeDoux găsește că reacția la teamă este una de tip cognitiv inconștient, care nu implică „sistemele superioare de prelucrare cerebrală". Spus simplu, modulul de detectare a prădătorilor se confruntă cu dilema oricărui proiectant de sisteme de alarmă contra hoților. Pe de o parte, proiectanții doresc ca sistemul să poată răspunde instantaneu la orice încercare de efracție, dar pe de alta, ei vor să reducă numărul de alarme false. Punându-le pe cântar, totuși, un răspuns întârziat s-ar putea dovedi mult mai costisitor și mai periculos decât câteva alarme false. Deloc surprinzător, de aceea, LeDoux consideră că există două căi neurale separate; prin intermediul cărora operează creierul. O rută mai scurtă, „rapidă și murdară", le permite animalelor să reacționeze la stimulii potențial periculoși chiar înainte să-i fi analizat complet. Cealaltă cale, „șoseaua principală", trece prin cortexul senzorial și beneficiază de o prelucrare mai extinsă.

Esențial pentru emoția imediată[4] (spre deosebire de sentimentul conștient) de frică este *nucleul amigdalian* – o mică structură în formă de migdală din lobul cerebral temporal (în limba latină, *amygdala* înseamnă „migdală"). LeDoux a utilizat chimicale care colorează neuronii pentru a urmări circuitele cerebrale ale șobolanului și a cartografia calea precisă de transmitere a fricii. Acesta reprezintă, un semnificativ pas înainte față de metoda simplei „extrageri a deprinderilor din șobolani", ce caracterizase studiile mult anterioare, pur comportamentale. LeDoux a descoperit că de îndată ce un șobolan dă prima alarmă (în forma unor țipete ascuțite), semnalul recepționat de ceilalți șobolani se duce direct de la talamusul lor senzorial (materia cenușie bilobată ce transferă semnalele senzoriale) la nucleul amigdalian. La rândul lui, aceasta din urmă, recepționând un stimul puternic, declanșează întregul sistem defensiv. Reacția

posibilă este de două feluri: animalul fie îngheață în loc (pentru a nu fi văzut), fie inima începe să-i bată cu putere, iar hormonii îi inundă sistemul circulator. Acești hormoni ajută la declanșarea acțiunii adecvate – șobolanul fuge, ca să-și scape viața, sau se pregătește să lupte cu prădătorul.

Nucleul amigdalian pare să guverneze reacțiile dictate de frică la toate speciile cu o structură similară, inclusiv la oameni. Cercetarea a arătat că o femeie cu nucleul amigdalian lezat și-a pierdut complet capacitatea de a detecta și de a recunoaște orice expresie facială înfricoșată.

Clar, mecanismul „rapid și murdar" declanșează câteva alarme false și atacuri inutile de panică. Totuși, talamusul trimite informații și la centrul de prelucrare mai precisă a semnalelor – cortexul senzorial. Acest drum mai lent furnizează în cele din urmă nucleului amigdalian o reprezentare mai fiabilă a stimulului real, oprind animalul să reacționeze exagerat.

Așa cum tocmai am văzut, simpla observare a simetriei bilaterale ar putea uneori porni sirena care pune în mișcare întreaga mașinărie (cognitiv inconștientă) a fricii. Simetria bilaterală poate, de asemenea, acționa, în diferite împrejurări, ca un mecanism în sine, de apărare împotriva prădătorilor. Multe animale (numite *animale aposematice*) utilizează diverse semnale, cum ar fi mirosuri, sunete și culori distinctive, pentru a-și preveni prădătorii că sunt periculoase sau dezgustătoare. Unii fluturi, spre exemplu, au pete mari care în repaus sunt ascunse[5], dar devin vizibile atunci când este detectat un prădător. Apariția bruscă a unei perechi de „ochi" zăpăcește adeseori prădătorul, îndeajuns pentru a-i da fluturelui ocazia să scape. Dintre diversele semnale de avertizare vizuală pe care le utilizează ființele aposematice, cele bazate pe simetria bilaterală s-au dovedit a fi cele mai eficace. În particular, fascinantele experimente care au expus ciugulelii păsărilor de curte „fluturi" artificiali de hârtie cu diferite modele de aripi au arătat că valoarea protectoare a unor asemenea avertismente vizuale este sporită de elemente decorative mari și simetrice. În aceste experimente, efectuate de cercetătorii suedezi[6], fluturii de hârtie (figura 99) erau fixați sub capacele de plastic ale unor vase Petri, în care erau presărate

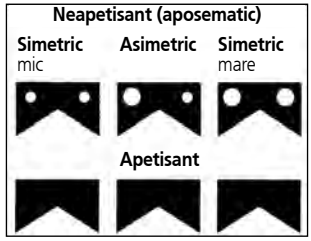


Figura 99

fărâmături de hrană. La fiecare nouă testare, se combinau 45 de fluturi negri monocromi cu fărâmături apetisante și 45 de fluturi aposematici cu fărâmături neapetisante, tratate cu chinină. Fluturii aposematici aveau desene de avertizare fie simetrice, fie asimetrice, iar fiecare grup de păsări de curte era expus la un tip (simetric mare, simetric mic sau asimetric) de fluturi de acest gen, neapetisanți. Rezultatele experimentale au sugerat că asimetria desenelor diminuează eficacitatea semnalelor aposematice. Cercetătorii au concluzionat că aceasta se datora, probabil, faptului că abaterile de la simetrie provoacă o reacție neurală mai slabă, făcând ca, pentru păsările de curte, semnalul să fie mai dificil de detectat, de memorat și de asociat cu inapetența. Aceste cercetări și multe altele, similare, conduc la o concluzie interesantă: Speciile vânate posedând colorit de avertizare ar putea fi supuse unei selecții naturale care favorizează desenele simetrice bilaterale mari.

Omul de stat și filozoful britanic Edmund Burke[7] (1729–1797) spunea odată că „nici o pasiune nu deposedează atât de eficace mintea de toate puterile ei de a acționa și de a raționa ca frica". Acest lucru este probabil adevărat, dar reacția inconștientă cognitivă la frică, declanșată ocazional de detecția simetriei, poate uneori fi exact ceea ce trebuie pentru a evita un prădător. Similar, în arena semnalizării, etalarea provocatoare a unor semnale aposematice simetrice furnizează, în unele cazuri, un scut protector împotriva prădătorilor potențiali.

Rolul simetriei în ambele tipuri de mecanisme de evitare a prădătorilor (detecție și semnalizare) este unul negativ. Simetria acționează, într-un anume sens, ca un agent repulsiv dacă este foarte evidentă. Dar oare poate ea provoca și un stimul încurajator, îmbietor? Procesul alegerii partenerului arată că, într-adevăr, poate – mai mult chiar decât ne-am aștepta.

Păsările o fac, albinele o fac, chiar și puricii dresați o fac

Evitarea prădătorilor și alegerea hranei potrivite sunt factori foarte importanți pentru supraviețuire. Din perspectiva genelor, totuși, supraviețuirea nu-i decât un mijloc de atingere a unui scop. Chiar dacă toți oamenii au implementat cu succes ideile din cartea umoristului George Burns[8] *Cum să trăim 100 de ani sau mai mult*, acest lucru n-ar fi de absolut nici un folos, din punctul de vedere al genelor, dacă ei n-ar avea și urmași. Reproducerea și transmiterea lor la generația următoare sunt esențiale pentru gene. Așa cum a formulat această idee biologul și autorul Richard Dawkins, „organismul nu-i decât un sistem genetic de producere a tot mai multe gene".

La unele specii, indivizii se pot reproduce singuri – ei se divizează în două și fiecare parte devine o nouă creatură. Natura a decis, clar, că acest proces asexuat este mai puțin amuzant, căci mai mult de 1,7 milioane de specii de pe pământ se angajează în reproducere sexuată. Mai serios vorbind, reproducerea sexuată trebuie să ofere speciilor un beneficiu adaptiv, altminteri n-ar fi așa de preponderentă. Evidenta diferență (între modalitatea sexuată și cea asexuată) este că descendenții rezultați din reproducerea sexuată pot beneficia de schimburile de gene dintre părinți. Noua și ameliorata compoziție genetică poate limita pagubele cauzate de mutațiile dăunătoare și poate spori adaptarea descendenților. Pentru a exploata pe deplin avantajele sexului, trebuie selectat cel mai potrivit partener. „Cel mai potrivit" din punct de vedere genetic înseamnă unul ale cărui caracteristici să crească șansele de supraviețuire și de reproducere ale descendenților. Aceasta se traduce în două trăsături principale: gene de înaltă calitate (în ceea ce privește adaptarea) și capacitate de a oferi grijă părintească. Aici mă voi concentra numai asupra celei dintâi, fiindcă este cea mai direct legată de simetrie.

Descendentul moștenește 50% din genele fiecărui părinte. Drept consecință, împerecherea cu un partener cu gene „bune" este vitală. De acest aspect și-a dat seama și Darwin, care a

recunoscut că, pe lângă faptul că este călăuzită de selecția naturală pentru supraviețuire, în evoluție contează și selecția sexuală[9], prin alegerea partenerului. Aici, totuși, intervine principala enigmă. Clar, strămoșii noștri nu erau echipați cu truse de testare ADN, așa încât, cum putea fiecare individ evalua potrivirea genetică a potențialului partener? Chiar și cu facilitățile de testare ADN devenite accesibile astăzi, mulți oameni tot nu se vor baza pe ele pentru alegerea iubiților așa cum nu o vor face nici păsările-văduvă cu coadă lungă sau păunițele. Dar o completă înțelegere a procesului de alegere a partenerului cere dezvăluirea tuturor misterelor atracției sexuale, ceea ce este clar dincolo de scopul prezentei cărți. Dintre numeroasele aspecte interesante ale acestei probleme, nu le voi discuta decât pe cele legate de simetrie.

Deci, cum se aleg partenerii? Ca principiu de bază, atât animalele, cât și oamenii caută (printre altele) niște indicatori ai potrivirii, cât mai demni de încredere. Se uită după acele caracteristici biologice care au evoluat anume pentru a o semnaliza și avertiza. De remarcat că, pe măsură ce indicatorii potrivirii au evoluat, s-a dezvoltat și capacitatea senzorială de detectare și recunoaștere a lor. Coloritul roșu ca focul al fundului unui babuin ar fi inutil dintr-o perspectivă evoluționistă dacă nu s-ar fi dezvoltat concomitent și o preferință pentru fundurile roșii, în sistemul de percepție a potențialilor parteneri. Trăsăturile masculilor și preferințele femelelor ar evolua simultan până la caracteristici și mai extreme câtă vreme beneficiul împerecherii nu este echilibrat de o forță de selecție naturală îndreptată în sens opus. Multe cercetări sugerează că unul dintre cei mai buni indicatori de potrivire este simetria bilaterală. Pentru a aprecia acest concept, să examinăm cazul particular, adeseori discutat, al cozii păunului. O coadă mare, perfect simetrică, anunță lumii sonor și clar: „Proprietarul meu n-are paraziți și nu a suferit afecțiuni perturbatoare." Paraziții păsărilor sunt atât de răspândiți și suferă mutații atât de brușe, încât orice exemplar care-i posedă trebuie să aibă gene foarte sănătoase. Un păun infestat cu paraziți va avea o coadă asimetrică, murdară. Cu alte cuvinte, o simetrie perfectă poate

fi un indiciu clar al stabilității evolutive. Chiar și deviațiile relativ mici de la perfecta simetrie (numite *asimetrii fluctuante*) pot dezvălui gradul de adaptare al genomului la mediul ambiant.

Legătura dintre alegerea partenerului și calitatea genetică a fost puternic susținută în anul 1982, printr-o importantă lucrare a biologilor William Hamilton și Marlene Zuk[10]. Cercetătorii au examinat paraziții din sângele unor păsări din America de Nord și relația potențială dintre aceștia și aspectul exterior. Rezultatele au sugerat că, într-adevăr, animalele își aleg partenerii în funcție de rezistența genetică la maladii, orientându-se după caracteristicile care le oglindesc starea de sănătate. Alte experimente, cu rândunele de casă[11] (efectuate de biologul suedez Anders Møller) și cu cintezoi-zebră[12] (efectuate de biologii britanici John Swaddle și Innes Cuthill), au arătat, de asemenea, că femelele utilizează simetria drept criteriu de alegere al partenerului.

O sensibilitate corespunzătoare la modelele simetrice trebuia să se dezvolte în sistemul de recepție a semnalelor cu asimetrie fluctuantă. Biologii Randy Thornhill, Andrew Pomiankowski și colegii lor au propus ipoteza că preferințele pentru simetrie au evoluat la animale tocmai din cauza faptului că gradul de simetrie al semnalelor este un indicator al calității celui care le emite. Simetria nu poate fi contrafăcută. Ne putem întreba de ce animalele vor în primul rând să-și dezvolte o podoabă atât de mare și de dificil de manipulat cum este coada la păun. Biologul israelian Amotz Zahavi[13] a dat un răspuns foarte plauzibil, ce a devenit cunoscut sub denumirea de *principiul handicapului*. Ideea lui Zahavi le poate părea unora foarte simplă: Costul ridicat (în termeni de dificultate de creștere și de manipulare) al podoabei sexuale este cel care indică primul, cu mare certitudine, potrivirea cu un anumit partener. Dacă o femeie vă spune la telefon că vă iubește, e foarte drăguț din partea ei, dar, dacă își folosește ultimul bănuț pentru a zbura tocmai din Japonia ca să vă vadă, demonstrează un nivel mult mai profund de implicare în relația voastră. Podoabele scumpe, care se întreține greu, sunt de efect deoarece dau dovada unor

calități (ale posesorului) ce inspiră mai multă încredere unui potențial partener. Masculii de calitate superioară se presupune că-și pot permite să cheltuiască suplimentul de energie pentru astfel de ținute extravagante.

Nu toți sunt de acord că preferința pentru simetrie este neapărat o consecință a faptului că simetria ar fi un indicator al potrivirii. Într-un interesant articol științific, biologul suedez Magnus Enquist și inginerul britanic Anthony Arak[14] au propus ipoteza că preferințele pentru simetrie ar putea să se manifeste doar din cauză că obiectele simetrice sunt mai ușor de recunoscut decât cele asimetrice, indiferent de orientarea lor. La urma urmei, una dintre problemele cu care se confruntă animalele este nevoia de a recunoaște obiecte cu diferite orientări, localizate în diverse puncte ale câmpului lor vizual. Orice ajutor pe care sistemul de percepție îl poate căpăta va fi apreciat și probabil preferat, rezultatul fiind o înclinație senzorială pentru simetrie. Enquist și Arak au utilizat rețele neuronale artificiale ca modele de sisteme de recunoaștere. Rețelele neuronale sunt sisteme de calcul bazate pe principiile de funcționare cerebrală, capabile să învețe din experiență pentru a-și ameliora performanța. În experimentele efectuate de Enquist și Arak, preferința pentru simetrie era, hotărât lucru, consecința unei explorări senzoriale – a nevoii de recunoaștere a semnalelor emise de potențialul partener –, neavând nici o legătură cu evaluarea calității genetice. Rezultate similare a obținut într-un experiment separat, cu o rețea neuronală[15] artificială, biologul Rufus Johnstone de la Cambridge. Concluzia a fost, din nou, aceea că, la împerechere, preferințele pentru simetrie se dezvoltă ca un simplu subprodus al selecției pentru recunoașterea partenerului, nu datorită relației dintre gradul de asimetrie fluctuantă și calitatea partenerului.

Din perspectiva acestei discuții, nu contează dacă, în regnul animal, preferința pentru simetrie este rezultatul căutării calităților reprezentanților de sex opus sau al recunoașterii instantanee a partenerului potrivit. Preferințele pentru simetrie s-au dezvoltat, probabil, din diverse motive. Important este doar faptul că *există o preferință pentru simetrie* – în cazul animalelor, simetria joacă un rol crucial în selecția partenerului.

Ce are dragostea de a face cu asta?

Oamenii sunt animale foarte complexe. Mixtura inseparabilă de psihologie evoluționistă, cultură, apartenență etnică, credințe, interese și trăsături personale atrage în cazul ființelor umane. Și totuși, undeva adânc, dorința genelor de a procrea reprezintă una dintre forțele motrice cele mai puternice, cu mare influență asupra minții umane. În căutarea unui partener sănătos și fertil, judecata nu ne este programată altfel decât cea a strămoșilor noștri din Epoca de Piatră. Frumusețea poate influența ochiul privitorului, dar, după expresia psihologului evoluționist David Buss[16], „ceilalți ochi și mințile din spatele ochilor sunt rezultatele modelării milioanelor de ani de evoluție umană". Sensul dat noțiunii de „atrăgător" este determinat în mare măsură de un mecanism adaptiv de luare a deciziei, care a evoluat, cel puțin parțial, în scopul selectării unui partener.

Dacă socotiți că atractivitatea este neimportantă, mai gândiți-vă. Anna Kurnikova s-a clasat cam a șaptezecea în campionatele de tenis din anul 2003 și, totuși, ea a câștigat, din reclame, milioane de dolari mai mult decât jucătoare aflate semnificativ mai sus în clasamente. În cazul în care vă întrebați de ce, iată un indiciu – a apărut de două ori pe coperta revistei *Maxim*. Producătorii programului *20/20* de la ABC News au făcut un experiment, pentru a determina cât de frecvent se bucură de tratament preferențial bărbații și femeile atrăgătoare. Într-un test efectuat în Atlanta, două actrițe îmbrăcate la fel au fost puse să stea neajutorate fiecare lângă o altă mașină rămasă fără benzină. Pentru cea cu înfățișare obișnuită, câțiva pietoni s-au oprit, dar numai ca să-i indice cea mai apropiată benzinărie. Pentru actrița mai atrăgătoare, nu mai puțin de o duzină de mașini au oprit, iar șase șoferi s-au și dus să aducă benzina!

Într-un al doilea experiment, echipa de la *20/20* a pus doi bărbați să facă cereri de angajare. Cei doi candidați aveau educație și experiență de muncă similare, chiar și micile deosebiri din CV-urile lor fiind deliberat netezite. Exista, totuși, o diferență observabilă între cei doi bărbați – unul era foarte atrăgător,

în vreme ce celălalt avea o înfățișare ceva mai ternă. Credeți sau nu, angajatorul era dornic să-l vadă pe bărbatul atrăgător întorcându-se cât mai curând pentru o zi de probă, în vreme ce bărbatul obișnuit la înfățișare a căpătat un răspuns gen „nu ne sunați, vă sunăm noi".

A fost identificată până și zona din creier[17] ce răspunde de frumusețe. Cercetătorii Hans Breiter, Nancy Etcoff, Itzhak Aharon și colaboratorii lor au apelat la tehnica imagisticii cu rezonanță magnetică pentru a investiga activitatea cerebrală a bărbaților atunci când li se arată fotografii de femei deosebit de atrăgătoare. Ei au constatat că frumusețea excită aceeași zonă din creier ca și hrana (atunci când persoana este flămândă) sau alți stimuli ce au legătură cu dependența (de pildă, ruleta în cazul unui jucător împătimit).

Mult timp s-a presupus că, în ce privește frumusețea, criteriile sunt în mare măsură culturale și, de aceea, mai curând învățate decât înnăscute. Studiile mai recente ale psihologului Judith Langlois de la Universitatea din Texas[18], Austin, au răsturnat total această concepție convențională. Langlois a cerut mai întâi unor adulți să clasifice după atractivitate fotografiile unor femei atât albe, cât și negre. Apoi, fotografiile au fost arătate în perechi (una mai atrăgătoare, alta mai puțin) unor copii mici, din două grupe de vârstă – de două-trei luni și de șase-șapte luni. S-a găsit că bebelușii din ambele grupe priveau mai îndelung chipurile clasificate ca fiind atrăgătoare. Similar, s-a constatat că prichindeii de un an se jucau semnificativ mai mult timp cu păpușile drăguțe.

Alte studii au verificat cum variază gusturile în funcție de tipul de civilizație. Psihologul Michael Cunningham a găsit[19] un incredibil consens al părerilor bărbaților de rase diferite în ceea ce privește atractivitatea facială a femeilor de rase diferite. Acordul persista chiar și dacă se luau în considerare diverse grade de expunere la mass-media occidentală. Studiile care au depășit frontierele geografice și etnice[20] (de exemplu, cu bărbați chinezi, indieni, sud-africani și nord-americani) au dat rezultate foarte asemănătoare. Luate împreună, toate aceste studii par să indice că există criterii universale de atractivitate și că

farmecul chipurilor atrăgătoare se adresează multor inimi, el manifestându-se de la vârste fragede și fiind același în toate culturile. Detectorii de frumusețe ar putea să nu fie chiar înnăscuți, dar este posibil ca mintea omenească să aibă reguli de bază înnăscute, de la care se construiesc șabloane de atractivitate.

Poate că există o înclinație spre adevărate discriminări făcute pe baza înfățișării, dar ce găsesc, în fond, atrăgător bărbații și femeile[21] ? Biologul Randy Thornhill, psihologul Steve Gangestad și etologul Karl Grammer au acumulat un mare volum de dovezi, care arată că simetria este un factor-cheie. Thornhill, Gangestad și colegii lor au măsurat simetria la circa o mie de studenți, atât a chipului (dispunerea colțurilor ochilor, pupilelor, pomeților, liniei gurii și așa mai departe), cât și a corpului (lățimea piciorului, lățimea mâinii, lățimea cotului, lungimea urechii, lungimea degetului al doilea și al cincilea și așa mai departe), pentru a elabora un indice general al asimetriilor. Atunci când Thornhill și Gangestad au corelat aceste date cu evaluări independente ale atractivității, au constatat că persoanele mai puțin simetrice cât privește corpul sau fața erau considerate ca fiind mai puțin atrăgătoare.

Printr-un studiu separat, Grammer și Anja Rikowski[22] au descoperit că simetria are legătură până și cu mirosul natural atrăgător al trupului. Acesta a implicat folosirea a 16 bărbați și 19 femei, fiecare subiect fiind pus să poarte un tricou timp de trei nopți consecutive, în condiții controlate. Imediat după utilizare, tricourile au fost înghețate și, exact înainte de evaluarea mirosurilor, au fost reîncălzite până la temperatura corpului uman. Apoi 15 subiecți de sex opus au trebuit să-l stabilească pe cel mai sexy, făcând evaluările pe o scară de șapte puncte. În paralel, 22 de alți oameni – atât bărbați, cât și femei – au apreciat atractivitatea subiecților, după niște fotografii, și a fost realizat un indice al simetriilor acestora, stabilit pe baza a șapte trăsături. Rezultatele au arătat că puterea de atracție exercitată de chip și mirosul trupesc sexy merg mână în mână în cazul subiecților de sex feminin. Mai mult decât atât, bărbații consideră că cele cu trup mai simetric, miros și mai sexy. Interesant, femeile sunt de părere că mirosurile bărbaților simetrici sunt

tentante numai atunci când ele se află în perioada cea mai fertilă a ciclului menstrual.

Cel mai surprinzător poate, Thornhill și Gangestad au descoperit o relație între simetrie și orgasm[23]. Cercetătorii raționau că, orgasmele reprezentând o adaptare necesară asigurării de gene sănătoase pentru urmași, femeile ar trebui să se bucure de mai multe dacă au parteneri mai simetrici. Conducând un studiu făcut pe 86 de cupluri de studenți heterosexuali, ei au ajuns la concluzia că, într-adevăr, femeile ai căror parteneri erau mai simetrici cunoșteau o frecvență semnificativ mai mare de orgasme. Oarecum neașteptat, cercetătorii n-au găsit nici o corelație între orgasm și nivelul de atașament sau experiența sexuală a partenerilor. Înainte ca vreo cititoare să se repeadă să-și găsească un iubit simetric, aș dori să observ că studiile mai arată ceva: că cei mai simetrici bărbați investesc cel mai puțin în relațiile lor și-și înșeală cel mai des partenerele. Orgasmul nu prea pare să aibă de-a face cu aspectul, ci mai degrabă cu evaluarea rece din Epoca de Piatră, a înzestrării genetice a partenerului.

O cercetare independentă efectuată de psihologii[24] Todd Shackelford și Randy Larsen a arătat că simetria feței umane se corelează foarte bine cu alți indicatori de potrivire, atât din punct de vedere fiziologic, cât și psihologic. În particular, s-a constatat că bărbații cu fețe asimetrice sunt mai predispuși la depresie, anxietate, dureri de cap, dificultăți de concentrare și chiar la disfuncții digestive. S-a descoperit, de asemenea, că femeile cu asimetrie facială au o sănătate mai șubredă și sunt mai înclinate spre instabilitate emoțională și depresie. Mai mult, simetria este și un indiciu al tinereții, căci cu cât îmbătrânește cineva, cu atât mai asimetrică îi devine fața.

Tabloul care ne apare este foarte sugestiv. Exact așa cum în regnul animal procesul de alegere a partenerului pare să fi identificat simetria ca un bun indicator al potrivirii, și pentru ființele omenești, simetria bilaterală a fost pusă pe picior de egalitate cu stabilitatea dezvoltării, tinerețea și rezistența la diverși agenți patogeni ce slăbesc organismul. Rezultatul, în termeni

de „magnetism“ animal/uman, era inevitabil – cuvintele *simetric* și *atrăgător* au devenit aproape sinonime.

Nu vreau să rămâneți cu impresia că simetria este singura calitate ce afectează atractivitatea. Psihologul Judith Langlois și colaboratorii ei subliniază că cel mai atrăgător este caracterul comun al trăsăturilor feței. Ea a generat pe calculator combinații[25] de patru, opt, 16 și 32 de chipuri. Spre surpriza ei, a constatat că fețele compuse erau judecate în general ca fiind mai atrăgătoare decât cele individuale, din care erau obținute primele. Combinațiile de 16 fețe erau considerate mai reușite decât cele de patru și de opt fețe, iar combinația de 32 de fețe a fost găsită cea mai atrăgătoare. Deși chipurile obținute prin combinații tind, prin construcție, să fie mai simetrice, Langlois a descoperit că, și după ce efectele simetriei au fost controlate, caracterul comun era încă judecat a fi atrăgător. Aceste constatări pledează în favoarea unui anumit nivel de prototipizare din minte, fiindcă acest caracter comun ar putea fi foarte bine cuplat cu un prototip.

Savantul cognitiv David Perrett[26] de la Universitatea din St. Andrews, Scoția, a ajuns la concluzia că fețele pe care le găsim atrăgătoare sunt adeseori îmbietoare fiindcă seamănă cu ale noastre sau cu ale părinților noștri. Intrigat de acest rezultat, l-am sunat în vreme ce făceam o vizită la St. Andrews, pentru a afla de ce credea el că era vorba de o alegere adaptivă. Perrett a subliniat mai întâi că, pentru ca mintea să fie în stare să-și aducă o contribuție la selecția partenerului, trebuie să existe un sistem de învățare. „Mai exact“, a adăugat, „mintea are nevoie de capacitatea de a se fixa pe lucruri relevante din imediata ei apropiere – ca simetria sau caracterul comun. Găsirea unor trăsături atrăgătoare la cineva care seamănă cu tine sau cu părinții tăi poate avea sens, căci familia ta a reușit deja să supraviețuiască, străbătând calea evoluției.“

Alți factori ce influențează selecția partenerului sunt legați de fertilitate, resurse și capacitatea/disponibilitatea de a juca rol de părinte. Spre exemplu, studiile efectuate de psihologul Devendra Singh arată că, aproape universal, bărbații preferă femei cu forma clasică[27] de „clepsidră“, caracterizată de un

raport talie–șold de 0,7. Motivul adaptiv pe care se bazează această preferință poate fi faptul că, după cum s-a descoperit, acest raport este și un bun indicator de fertilitate. O preferință posibil legată de aceasta s-a găsit și pentru simetria pieptului. Alte sondaje de opinie spun că femeile preferă în general parteneri ceva mai în vârstă decât ele, probabil din cauza preferinței lor pentru bărbați cu resurse.

Deși succintă, descrierea prezentată în acest capitol, a rezultatelor și ideilor din psihologia evoluționistă, pare să conducă la o concluzie clară. Indiferent care ar fi cauza, selecția partenerului, intuirea acestuia, evitarea prădătorilor sau o combinație a acestor trei, *mințile noastre sunt atrase de simetrie și sunt fin acordate pentru a o detecta*. Întrebarea dacă simetria este cu adevărat fundamentală pentru universul însuși sau doar pentru univers, așa cum îl percep ființele umane, devine, deci, deosebit de acută.

Chiar o fi guvernând simetria?

Să ne imaginăm ce s-ar fi întâmplat dacă ochiul omenesc ar fi fost sensibil numai la lumina albastră. Înainte de dezvoltarea oricărui alt detector de lumină, savanții ar fi conchis, natural, că orice lucru din univers este albastru. Similar, o companie de deratizare care produce capcane lungi de opt centimetri ar putea concluziona că toți șoarecii sunt mai scurți, din cauză că cei prinși ar avea această lungime maximă. Am dat doar două exemple simple de *efecte de selecție* observaționale – filtrări, prin intermediul preconcepțiilor nerecunoscute, ale realității fizice fie în metodele de observație, fie în instrumentele de observare. Ar putea introduce preferința minților umane pentru simetrie o tendință similară în percepția noastră a ceea ce este cu adevărat fundamental în univers?

Trebuie să accentuez din nou că mă concentrez asupra simetriilor legilor naturii și asupra descrierii lor utilizând teoria grupurilor, nu asupra simetriei oricăror structuri particulare din natură. Cristalele perfecte sunt exemple ale acestora din urmă. Ele arată exact la fel dacă ne mișcăm în interiorul cristalului,

pe anumite distanțe, în diverse direcții. Cristalografia este știința studierii structurilor și proprietăților ansamblelor compuse dintr-un număr mare de unități identice. La rândul lor, unitățile pot fi constituite din atomi, molecule sau, într-un context mai abstract, chiar și din secvențe de cod-mașină. O întrebare tipică în cristalografie ar putea fi următoarea: Cum poate fi aranjat în spațiu un număr mare de unități identice astfel încât fiecare unitate să „vadă" împrejurimi identice? Teoria grupurilor este pâinea și untul cristalografiei – încercările de a răspunde la întrebarea de mai sus au avut drept rezultat o demonstrație care a spus că nu există decât 230 de tipuri diferite de grupuri de simetrie spațială (exact așa cum catenele liniare nu au decât 7 grupuri diferite de simetrie; vezi Capitolul 7).

Principiile simetriei se mai manifestă și în structura unei diversități de molecule și organisme biologice, de la proteine cristalizate și ADN până la virusuri. Toate aceste simetrii sunt evident importante, căci reprezintă sisteme stabile (de energie minimă), care la rândul lor duc la apariția mineralelor și ființelor vii. Totuși acestea nu sunt simetrii subiacente legilor de bază ale naturii.

Atunci când vine vorba de legi, nu există absolut nici o îndoială că simetria și teoria grupurilor sunt concepte extrem de *utile*. Fără introducerea simetriei și a limbajului grupurilor în fizica particulelor, descrierea particulelor elementare și a interacțiunilor lor ar fi fost un coșmar încâlcit. Grupurile „adulmecă" cu adevărat ordinea și identifică formele, ca nici un alt instrument matematic.

Într-un interviu din 1985[28], matematicianul Andrew Gleason de la Harvard spunea: „Desigur că matematica trebuie să dea rezultate în fizică! Ea este proiectată să discute exact situația cu care se confruntă fizica; și anume, că pare să existe ceva ordine – hai să descoperim despre ce e vorba." În plus față de utilitatea sa, simetria elimină redundanțele din descrierea sistemelor, fie ele reale sau abstracte. Spre exemplu, să ne imaginăm că un anumit sistem este reprezentat simbolic de următorul șir de caractere:

XYZXYZXYZXYZXYZ.

Putem utiliza simetria de translație a simbolurilor pentru a elimina redundanța și a reduce descrierea la forma mult mai compactă 5*(XYZ), citită sub forma „repetă subșirul XYZ de cinci ori". Similar, în șirul:

UVWXYZZYXWVU

putem utiliza simetria de reflexie pentru a reduce șirul la *SIM*(UVWXYZ), unde operatorul *SIM* indică acest tip de reflexie. Întrebarea reală este, de aceea, dacă simetria e încorporată în structura naturii sau nu face decât să reprezinte o modalitate aflată la îndemâna noastră, pentru purtarea unui dialog cu realitatea fizică. Întrebarea nu-i ușoară. Pentru anumiți pași făcuți pe drumul ce ne va duce spre teoria definitivă a universului, simetria pare a fi mai importantă decât pentru alții. Simetria de bază dintre oricare doi observatori, ce stă la temelia relativității, spre exemplu, este o simetrie exactă, care pare într-adevăr să caracterizeze natura. Pe de altă parte, unul dintre primele modele ale nucleelor atomice, numit *modelul lui Elliott*[29], era descris de o simetrie (și de un grup asociat), deși se știa că acea simetrie nu este decât aproximativă și aproape cert nefundamentală.

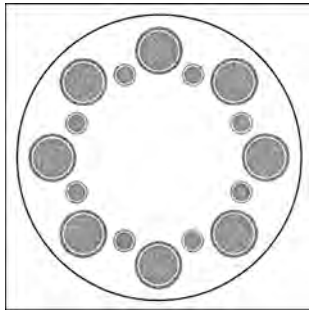


Figura 100

O posibilă problemă, ridicată de unele dintre simetriile gauge presupuse a ne oferi baza pentru modelul standard, este cea a *ruperii simetriei*. Dați-mi voie să explic pe scurt acest concept. Să examinăm vederea de sus a mesei pregătite pentru cină din figura 100, unde farfuriile mici sunt pentru pâine. Toate scaunele din jurul mesei sunt identice, iar din punctul de vedere al oricărei persoane așezate pe ele, stânga și dreapta sunt de nedistins. Configurația este, de aceea, simetrică atât față de rotații (cu multipli întregi de 360° : 8 = 45°), cât și față de reflexii (în jurul a opt axe). Însă îndată ce pâinea este servită și prima persoană o pune pe o farfurioară (la stânga

sa, mi se spune că-i normal), simetria este „ruptă spontan". Stânga și dreapta devin distincte, iar invarianța rotațională se pierde.

Amintiți-vă că în teoria electroslabă, electromagnetismul și forța nucleară slabă sunt două fețe ale aceleiași monede (Capitolul 7). Purtătorii de forță – fotonul, W și Z – sunt interschimbabili. O întrebare care se ridică imediat este de ce au aceste două forțe manifestări atât de diferite (de exemplu, una este de o sută de mii de ori mai mare decât cealaltă) în universul de azi? Modelul standard aruncă vina asupra ruperii simetriei. Conform cu cel mai popular scenariu, puțin după momentul în care universul nostru a luat ființă (eveniment pe care-l numim Big Bang), exista o simetrie perfectă între electromagnetism și forța slabă. La enormele temperaturi ce caracterizau această fază, fotonii și particulele W și Z erau cu adevărat de nedeosebit. Pe măsură ce universul s-a extins și s-a răcit, totuși, el a trecut printr-o tranziție de fază – nu mult deosebită de înghețarea unui lichid – în care s-a produs fenomenul de rupere a simetriei. Se presupune că acest lucru s-a petrecut pe când universul avea vechimea unei infime fracțiuni (circa 10^{-12}) dintr-o secundă. Analogia cu lichidul poate fi, de fapt, dusă un pas mai departe. Un lichid arată la fel oricum l-ai turna – nu există o direcție preferată. Această simetrie se pierde, totuși, dacă lichidul îngheață. Structura cristalină formată are unele axe preferate. Se crede că ruperea simetriei dintre forțele electromagnetice și cele nucleare slabe, ce era asociată cu „înghețarea" cosmică, este cea care a generat diferențele pe care le observăm astăzi. Particulele W și Z au fost înzestrate cu mase, în vreme ce fotonul a rămas fără masă. Sfera de acțiune a forței nucleare slabe este limitată numai la distanțe de ordinul mărimii nucleelor, din cauza purtătorilor săi greoi, înceți.

Pentru un neinițiat, descrierea de mai sus poate suna un pic ca un basm plin de fantezie. O astfel de persoană s-ar putea gândi că fizicienii particulelor au inventat o simetrie care se presupune că ar caracteriza forțele de bază ale naturii, iar atunci când s-a constatat că universul din zilele noastre nu ascultă de acea simetrie, au născocit un foarte convenabil scenariu al

ruperii simetriei. În realitate, teoria este mult mai solidă decât sugerează descrierea de mai sus. Multe dintre predicțiile modelului standard au fost confirmate spectaculos pe cale experimentală (Capitolul 7). Și mai important, foarte curând vor deveni realizabile niște teste experimentale pentru întreaga schemă a ruperii simetriei. În același mod în care temperaturile de înghețare[30] ale lichidelor pot fi estimate pe baza maselor atomice și energiilor ce țin atomii împreună, parametrii cunoscuți ai modelului standard pot fi utilizați pentru a estima energia în punctul de rupere a simetriei. Energiile cerute sunt fie deja realizabile într-un mare accelerator de particule – ca Tevatronul Laboratorului Fermi al Universității din Chicago –, fie vor putea fi obținute cu Large Hadron Collider de la CERN, cam prin 2007. În cel mai rău caz, se speră că aceste experimente ne vor spune doar că ideile teoretice ale ruperii simetriei sunt pe calea cea bună[31]. Dar aceleași experimente ar putea testa și predicțiile supersimetriei. Amintiți-vă că, dacă lumea reală ascultă de supersimetrie, se așteaptă să fie descoperite o groază de noi particule. Electronul cu spin 1/2 trebuie să aibă un partener cu spin 0 (numit „selectron"), fotonul de spin 1 trebuie să aibă un partener „fotino" cu spin 1/2, iar parteneri similari se prezice că există pentru fiecare particulă din modelul standard.

Mai există și un alt motiv pentru care se impune oarecare precauție înainte de a proclama simetria drept principala forță motrice în geneza și transformările universului, iar teoria grupurilor drept limba sa primară. Acest motiv poate fi cel mai bine demonstrat utilizând exemplul regulilor de căsătorie-înrudire Kariera. Nu uitați că s-a demonstrat că regulile acestui trib de aborigeni formează un grup, cu aceeași structură ca și faimosul cvadrigrup al lui Klein. Este neîndoielnic, totuși, că membrii tribului Kariera nu intenționau ca regulile lor să formeze vreo structură matematică particulară. Ca atare, suntem confruntați cu o situație în care am identificat un instrument matematic ce procură o descriere perfectă a realității, dar în care adevăratele motive pentru acea realitate rămân necunoscute. Motivația reală care i-a condus pe membrii tribului Kariera să aleagă acest set particular de reguli de conduită ar

putea avea relativ puțin de-a face cu ordinea pe care am recunoscut-o în el, deși o analiză mai aprofundată ar putea dezvălui că aceste reguli asigură o societate stabilă.

Pe când mă chinuia întrebarea privitoare la importanța reală a simetriei, m-am decis să fac un mic sondaj de opinie printre unii dintre fizicienii și matematicienii de vârf ai lumii, pentru a afla ce credeau ei despre acest subiect. Steve Weinberg, laureat al Premiului Nobel pentru fizică în 1979 și unul dintre jucătorii-cheie în elaborarea modelului standard, a fost de acord că simetria ar putea să nu fie cel mai important concept în teoria definitivă a universului. El a adăugat: „Presupun că, la sfârșit, singurul principiu ferm va fi acela al compatibilității matematice." Ed Witten, care a primit Medalia Fields pentru matematică în 1990 și a produs cea de-a doua revoluție a stringurilor, a subliniat, de asemenea, că „mai există ingrediente lipsă sau necunoscute în teoria stringurilor" și că „unele concepte, ca geometria riemanniană în relativitatea generală, s-ar putea dovedi mai importante decât simetria". Sir Michael Atiyah, care a primit Medalia Fields în 1966 și Premiul Abel în 2004, făcea aluzie la efectele selecției dirijate de mintea omenească. „Noi venim să descriem natura[32] cu anumiți ochelari", spunea el. „Descrierea noastră matematică este precisă, dar pot exista modalități mai bune. Utilizarea grupurilor Lie excepționale ar putea fi un instrument al gândirii noastre." Ultima frază, în special, mi-a amintit de o altă interesantă declarație, a faimosului matematician și filozof Bertrand Russell (1872–1970): „Fizica este matematică nu din cauză că știm atât de mult despre lumea fizică, ci din cauză că știm atât de puțin; ceea ce noi putem descoperi sunt numai proprietățile sale matematice." Cu alte cuvinte, Russell vedea chiar și descrierea pe care o facem universului prin intermediul matematicii ca fiind periculos de aproape de un anume soi de efect al selecției. Freeman Dyson, una dintre principalele figuri din elaborarea electrodinamicii cuantice și posesor al Premiului Wolf pentru fizică în 1981, oferea, ca întotdeauna, un punct de vedere unic: „Simt că nici măcar n-am început să înțelegem de ce este universul așa cum este." După câteva secunde de reflecție, el a adăugat: „Chiar

și lucrurile simple, cum ar fi capacitatea noastră de a spune dacă o linie este perfect dreaptă sau de a distinge între un cerc și o elipsă, sunt mistere în sine." Privitor la simetrie, el a mărturisit că preferă să n-o considere „fundamentală", ci „fructuoasă" atunci când se referă la ea ca fiind sursa forțelor (ca în cazul simetriilor gauge ale teoriei electroslabe). În sfârșit, Dyson observa că simetria și teoria grupurilor au devenit elemente descriptive mult mai puternice de la introducerea mecanicii cuantice.

Deci ce putem concluziona în ceea ce privește rolul simetriei în structura cosmică? Umila mea părere este că nu știm încă dacă va reieși că ea este conceptul fundamental al funcționării universului. Unele dintre simetriile pe care fizicienii le-au descoperit sau le-au discutat peste ani au fost recunoscute ulterior ca fiind accidentale sau numai aproximative. Alte simetrii, cum ar fi covarianța generală din relativitatea generală și simetriile gauge ale modelului standard, au devenit mugurii din care au înflorit noi forțe și particule. Până la urmă, nu există absolut nici o îndoială în mintea mea că principiile simetriei ne spun câte ceva important aproape întotdeauna și că ele pot furniza cele mai valoroase indicii și elemente de înțelegere spre dezvăluirea și descifrarea principiilor subiacente ale Universului, oricare vor fi fiind acestea. Simetria, în acest sens, este într-adevăr fructuoasă.

În *The Feynman Lectures on Physics*, o carte bazată pe un curs predat de faimosul fizician Richard Feynman în anul universitar 1961–62, autorul își încheie astfel discuția[33] despre simetrie:

> Problema noastră este deci de a explica de unde vine simetria. De ce este natura doar cvasisimetrică? Nimeni n-are idee de ce. Singurul lucru pe care l-am putea sugera este ceva de genul: Există o poartă în Japonia, la Neiko, despre care japonezii spun uneori că este cea mai frumoasă poartă din țara lor; ea a fost construită într-un timp când arta chinezească avea o mare influență. Această poartă este foarte complicată, cu o mulțime de frontoane și frumoase sculpturi în lemn, nenumărate coloane, capete de dragoni, prinți sculptați pe stâlpi și așa mai

departe. Dar dacă cineva se uită cu mare atenție, vede că, în complexul design al uneia dintre coloane, există un element sculptat cu josul în sus; altminteri, toată coloana e complet simetrică. Dacă cineva întreabă de ce este așa, povestea spune că elementul respectiv a fost sculptat invers pentru ca zeii să nu fie geloși pe perfecțiunea omului. Japonezii au făcut deci o eroare intenționată, pentru ca zeii să nu fie geloși și să nu se mânie pe ființele omenești. Am putea inversa ideea și gândi că adevărata explicație a cvasisimetriei naturii este aceasta: că Dumnezeu a făcut legile numai aproape simetrice pentru ca noi să nu fim geloși pe perfecțiunea Sa!

Simetriile asociate cu legile naturii nu sunt singura tematică în care moștenirea lui Galois a generat și continuă să genereze noi idei. Ne putem forma măcar o idee vagă despre această incredibilă moștenire examinând câteva simple exemple, cuprinzând o gamă de activități artistice și intelectuale, de la muzică la algebra modernă.

Ce pasiuni nu poate trezi și potoli muzica?

Titlul acestei secțiuni este luat din „Un cântec pentru ziua Sfintei Cecilia", de faimosul poet și dramaturg englez John Dryden (1631–1700). Sărbătoarea Sfintei Cecilia (22 noiembrie) păstra amintirea legendei potrivit căreia această sfântă patroană a muzicii a inventat orga. Poemul este un tribut plătit puterii muzicii. Într-adevăr, puține forme de artă sunt mai strâns legate de stările emoționale și de ritmul corpului omenesc decât muzica. Respirația și bătăile inimii, spre exemplu, sunt intim corelate cu nivelul și natura activităților pe care le desfășurăm și cu intensitatea exaltării sau fricii noastre. Multe piese muzicale – nici una, poate, mai mult decât celebrul *Bolero* al lui Ravel – reflectă direct ritmurile vieții. De fapt, în filmul *10* realizat de Blake Edwards în anul 1979, *Bolero*-ul era declarat pista sonoră perfectă pentru a face dragoste. Așa cum am remarcat deja în Capitolul 1, a spune că simetria joacă un rol major în muzică este echivalent cu a afirma evidența. Drept

consecință, era de așteptat ca teoria grupurilor să descrie frumos structurile și motivele muzicale.

Claviatura unui pian procură cel mai simplu exemplu al relației dintre grupuri și muzică. Înălțimea unui ton se caracterizează prin *frecvență* – numărul de vibrații pe secundă (de pildă, ale unei coarde). Frecvența se măsoară în număr de vibrații pe secundă sau herți (notați cu Hz), după fizicianul german Heinrich Rudolf Hertz. Spre exemplu, frecvența lui C mediu (sau „do" în gama majoră) pe clapele unui pian (figura 101) este de circa 261,6 Hz. Frecvența lui A_4 (sau „la") este de 440 Hz. *Octava* se definește așa încât raportul frecvențelor să fie egal exact cu 2. O octavă mai sus decât „do" mediu are frecvența de $261{,}6 \times 2 = 523{,}2$ Hz, iar o octavă mai jos are frecvența de $261{,}6 : 2 = 130{,}8$ Hz. Notele care sunt separate printr-un număr întreg de octave poartă aceeași denumire și sună asemănător. În „sistemul bine temperat", popularizat de Bach în impresionanta sa colecție de preludii și fugi, toate clapele au statut egal. Raportul dintre frecvențele oricăror două clape adiacente este același, egal cu 1,05946. Acest număr (egal cu rădăcina de ordinul doisprezece a lui 2) se obține pur și simplu prin cerința ca, atunci când este ridicat la puterea 12 (există douăsprezece semitonuri sau jumătăți de pas în octavă), să dea un raport de 2, corespunzător tonului cu o octavă mai sus.

Matematicianul grec Pitagora este creditat în mod tradițional cu descoperirea că două note ce corespund unor frecvențe al căror raport este egal cu raportul dintre două numere întregi simple (cum ar fi 3:2) dau sunete armonioase („consonante") și plăcute. O cvintă perfectă, spre exemplu, se caracterizează printr-un raport al frecvențelor de 3/2, ceea ce corespunde unei separări prin șapte semitonuri (puterea a șaptea a lui 1,05946

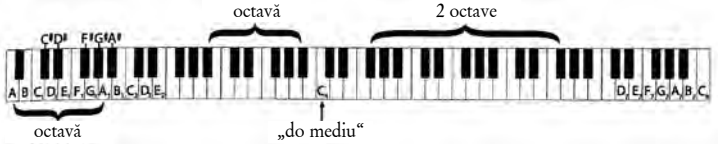



Figura 101

este foarte apropiată de 1,5). O cvartă perfectă corespunde unui raport al frecvențelor de 4/3 și unei diferențe de cinci semitonuri.

Fiindcă există douăsprezece semitonuri într-o octavă, le putem reprezenta convenabil pe cadranul unui ceas[33], ca în figura 102. Ne putem deplasa acum de la oricare notă la oricare alta, efectuând exact aceeași operație ca atunci când calculăm ora din zi. Adică, dacă vrem să știm ce înseamnă 9 ore după 7:00 p.m., calculăm 7 + 9 = 16 = 4:00 a.m. (deoarece 12 este socotit și 0). Adunarea numerelor în acest fel se numește, în limbajul matematicienilor, *adunare modulo 12*. Spre exemplu, 8+7=15=3 (modulo 12), iar 10 + 2 = 12 = 0 (modulo 12). Semitonurile sistemului bine temperat ascultă de aceleași reguli. Dacă vrem să știm ce notă obținem prin 10 semitonuri peste *re*# (figura 102), calculăm 3 + 10 = 13 = 1 (modulo 12) = *do*#. Mulțimea de numere {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} sau notele corespunzătoare de pe scara muzicală formează un grup sub operația de adunare modulo 12. Puteți lesne verifica închiderea – de exemplu, 9 + 4 = 13 = 1 (modulo 12) – și asociativitatea. Elementul neutru este 0, iar toate celelalte numere au un simetric sau un invers. Spre exemplu, cvinta perfectă (corespunzând la 7 semitonuri) este simetricul cvartei perfecte (corespunzând la 5 semitonuri), fiindcă 7 + 5 = 12 = 0 (modulo 12). Ceea ce are sens chiar și dintr-o perspectivă pur muzicală, căci atunci când se combină aceste două intervale, obținem un raport de frecvențe de 3/2 x 4/3 = 2, care este tocmai o octavă – ceea ce dă același sunet. De fapt, foarte corect spus, muzicienii numesc două intervale ce se combină pentru a da o octavă „inversiuni" ale unuia în raport cu celălalt. Un alt exemplu de două astfel de inversiuni (figura 103) este terța mică (raport de 6/5; 3 semitonuri) și sexta mare (raport de 5/3; 9 semitonuri), fiindcă 3 + 9 = 12 = 0 (modulo 12).

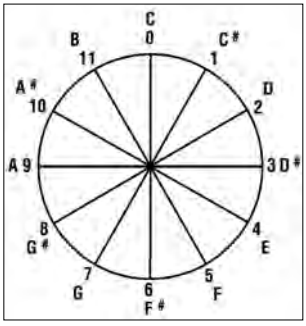


Figura 102

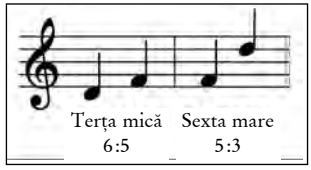



Figura 103

Grupurile își fac apariția nu numai în scara muzicală, ci și în structura anumitor forme de muzică. Un caz simplu este acela al rondei – un tip de scurt canon, în care vocile intră pe rând pentru a cânta aceeași melodie, ca în familiarul „Frère Jacques“ (figura 104).

Dacă notăm cele patru fraze diferite cu A, B, C, D (figura 104), structura se reprezintă prin AABBCCDD (fiecare frază se repetă), iar ronda pentru patru voci ia forma:

1: A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B C C D D
2: – – A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B C C
3: – – – – A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B
4: – – – – – – A A B B C C D D A A B B C C D D A A

Observăm că, dacă ar fi să intre o a cincea voce, ea n-ar face decât să repete sau să dubleze prima voce. De fapt, începând cu orice voce, dacă am continua să adăugăm voci, ajungând la a patra, am obține dublare. Am putea nota acum cu a instrucțiunea „vino cu două măsuri mai târziu“. Aceasta ne deplasează de la o voce la următoarea. Simbolic, a^2 (sau $a \circ a$) denotă „vino cu patru măsuri mai târziu“, a^3 ($a \circ a \circ a$) este „vino cu șase măsuri mai târziu“, iar a^4 („vino cu opt măsuri mai târziu“) este dublarea aceleiași voci, sau elementul neutru. Puteți verifica lesne că cele patru instrucțiuni I, a, a^2, a^3 (unde I este elementul neutru al transformării identice) formează un grup față de operația de „înmulțire“ (de ex., a și a^3 sunt fiecare inversa celeilalte, fiindcă $a \circ a^3 = a^4 = I$).

Clar, nici Bach și nici oricare altul dintre compozitorii clasici nu aveau teoria grupurilor în minte atunci când își compuneau

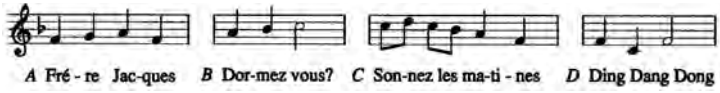


Figura 104

muzica. Teoria grupurilor își croiește inevitabil drum în descrierea tiparelor muzicale datorită simplului fapt că, prin natura ei, este un limbaj al simetriilor. Unii compozitori din secolul XX, mai ales Arnold Schönberg[34], Alban Berg și Anton Webern din a doua Școală Vieneză, se zice că au cochetat mai hotărât cu muzica bazată pe matematică. Mai exact, în „metoda compunerii cu douăsprezece tonuri", utilizată în piese ca *Suită lirică* a lui Berg sau *Concertul pentru pian* al lui Schönberg, toate armoniile se bazează pe un „rând de douăsprezece tonuri" care este, de fapt, o permutare a celor douăsprezece note cromatice obișnuite. Un rând de douăsprezece tonuri este utilizat fie în ordinea sa originală (aleasă de compozitor), fie poate fi transformat prin unele operații. Trei operații de bază utilizate de compozitorii vienezi erau *inversiunea rândului*, *retrogresiunea* și *inversiunea retrogradă*. În inversiunea rândului, intervalele coborâtoare erau înlocuite cu intervale urcătoare și invers. Spre exemplu, dacă rândul original începea cu „do" și urca o cuartă perfectă până la „fa", rândul inversat cobora o cuartă perfectă până la „sol" (figura 102). Retrogresiunea inversa ordinea salturilor melodice. Dacă ultimul salt din rândul original era o terță mare în sus, atunci acesta va fi primul salt din noul rând. În sfârșit, inversiunea retrogradă aplica simultan atât inversiunea rândului, cât și retrogresiunea. Vă puteți convinge lesne că aceste trei transformări, împreună cu cea identică („nu face absolut nimic"), formează un grup sub operația „urmată de". În particular, fiecare membru al acestui grup este propriul său simetric (sau invers).

Multă lume, incluzându-i pe pasionații sălilor de concerte, simt un disconfort la muzica atonală[35] a lui Schönberg, ca și la alte piese experimentale, de Igor Stravinski, Aaron Copland, Pierre Boulez, Luciano Berio și de mulți alții. Membrii acestui public anti-atonalitate vor argumenta, probabil, că utilizarea matematicii de către acești compozitori (dacă este, într-adevăr, deliberată) nu a servit calitatea muzicii. Totuși, indiferent care ar putea fi opinia noastră personală despre muzica atonală, este de netăgăduit faptul că experimentarea „matematică" a lui Schönberg și (mai mult chiar) a lui Webern a deschis ușa

interesantei Noi Muzici de avangardă și a furnizat inspirația pentru *serialism*. Această revoluție în compoziție a înlocuit toate regulile și convențiile tradiționale, printr-o serie structurală de note ce guvernează întreaga dezvoltare a compoziției. Fascinanta muzică a unor compozitori ca Olivier Messiaen și Milton Babbitt își are originea în această radicală schimbare de principii.

Muzica reprezintă o formă de artă în care au fost implicate numai cele mai de bază concepte ale grupurilor. Dar dezvoltarea teoriei grupurilor nu s-a oprit la începutul secolului XX. O demonstrație legată de ea, care a fost terminată abia în august 2004, este în unele privințe cea mai complexă demonstrație din istoria matematicii.

„Războiul de treizeci de ani" sau îmblânzirea monstrului

Eforturile științifice reprezintă adeseori o căutare a celor mai de bază blocuri constructive. În ceea ce privește structura materiei, această căutare lungă de secole a condus la descoperirea moleculelor și atomilor, apoi a protonilor și a neutronilor, apoi a particulelor elementare din modelul standard (quarci, electroni, neutrino, mezoni, tauoni) și, în final, la ipoteza strungurilor. În vastele întinderi ale spațiului, astronomii caută acum primele stele și primii nori de stele ce s-au format în univers – blocurile constructive ale giganticelor galaxii de astăzi. În teoria grupurilor, vânătoarea a fost după o clasificare a tuturor grupurilor simple (care nu au subgrupuri normale nebanale), din care pot fi construite toate celelalte grupuri. Așa cum am văzut în Capitolul 7, clasificarea grupurilor Lie simple a fost efectuată spre sfârșitul secolului al XIX-lea, de Wilhelm Killing și Elie Cartan. Grupurile Lie sunt grupuri de transformări continue (cum ar fi rotațiile în spațiul cu trei dimensiuni), care fuseseră definite de Sophus Lie în 1874. Prin chiar natura lor, grupurile Lie au un număr infinit de elemente (de exemplu, există un număr infinit de unghiuri de rotație posibile). Și totuși, este

suficient să fie precizat un număr finit de parametri, pentru a caracteriza complet orice grup Lie. De pildă, elementele grupului de rotații ale unui cerc în plan, notate de obicei cu SO(2) sau U(1), sunt complet determinate dacă este precizat un singur parametru – unghiul de rotație. Dimensiunea acestui grup este, de aceea, 1. Grupul de rotații ale unei sfere în spațiul tridimensional poate fi caracterizat prin trei parametri – două unghiuri ce identifică poziția axei de rotație și un unghi pentru rotația însăși. Acest grup, notat cu SO(3), este ca atare de dimensiune 3. Killing și Cartan au izbutit să găsească patru familii infinite de grupuri Lie (notate tradițional cu A_m, B_m, C_m, D_m, pentru $m = 1, 2, 3, \ldots$) și cinci grupuri sporadice, care nu puteau fi incluse în nici una dintre aceste familii. Aceste grupuri sporadice se numesc de regulă G_2, F_4, E_6, E_7 și E_8 și au dimensiuni de 14, 52, 78, 133, respectiv 248. Așa cum am spus în Capitolul 7, grupurile Lie simple joacă un rol crucial în modelul standard și se pot dovedi a fi un instrument esențial în teoria stringurilor.

Clasificarea grupurilor finite simple a reieșit a fi o sarcină mult mai descurajatoare decât a grupurilor Lie. Pe la sfârșitul secolului al XIX-lea, erau cunoscute șase familii infinite și cinci grupuri finite simple sporadice (excepționale). Una dintre acele familii fusese definită[36] de nimeni altul decât de Galois însuși, pe când se chinuia cu nerezolvabilitatea ecuației de gradul cinci. Amintiți-vă că într-o permutare pară a unei mulțimi de elemente, există un număr par de inversări ale ordinii naturale sau originale (Capitolul 6), iar într-o permutare impară, numărul de inversări este impar. Spre exemplu, 1324 reprezintă o permutare impară a lui 1234, din cauză că ea implică numai o inversare (3 apare înaintea lui 2), dar 4321 reprezintă o permutare pară, din cauză că, după cum puteți verifica, implică șase inversări. Știm deja (Capitolul 6) că toate permutările a n elemente formează un grup cu $n!$ elemente. De fapt, teorema lui Cayley spune că fiecare grup are aceeași structură ca un grup de permutări. Mulțimea permutărilor pare ale oricărui număr de elemente formează, de asemenea, un grup – un subgrup al grupului complet de permutări. Acest lucru este ușor de înțeles: Dacă o permutare implicând un număr par de inversări este urmată

de o a doua, tot pară, atunci numărul total de permutări este categoric și el par, ceea ce înseamnă că e respectată cerința de închidere. Grupurile de permutări pare se numesc *grupuri alternate*. Galois a arătat că toate grupurile alternate obținute din permutările a peste patru elemente sunt simple, aceasta fiind proprietatea pe care a utilizat-o pentru a demonstra nerezolvabilitatea printr-o formulă a ecuației de gradul cinci.

O a doua familie de grupuri simple cunoscută matematicienilor la sfârșitul secolului al XIX-lea era de tipul pe care l-am întâlnit la scara muzicală. În același mod în care numerele de la zero la 11 formează un grup când li se asociază operația de adunare modulo 12, numerele de la zero la $n - 1$ formează un grup cu adunarea modulo n, pentru orice valoare a lui n. Grupurile de acest tip se numesc *grupuri ciclice*, iar grupurile ciclice cu un număr prim de elemente sunt simple. Celelalte patru familii de grupuri finite simple erau echivalente în multe privințe cu familiile corespunzătoare de grupuri Lie. În 1955, matematicianul francez Claude Chevalley (1909–1984) a descoperit noi familii de grupuri simple. De fapt, s-a constatat că grupurile Lie sporadice sunt sursa familiilor de grupuri finite simple. În cele din urmă, au fost identificate 18 familii de astfel de grupuri.

Povestea grupurilor finite simple sporadice[37] a început cu matematicianul francez Émile Léonard Mathieu (1835–1890). Între 1860 și 1873, pe când studia geometriile finite, Mathieu a descoperit primele cinci grupuri simple sporadice, care ulterior au fost numite după el. Cel mai mic dintre acestea are 7 920 de elemente, iar cel mai mare 244 823 040. A trecut un întreg secol înainte ca următorul grup simplu sporadic să fie descoperit, de matematicianul iugoslav Zvonimir Janko, în 1965. Fusese prezisă existența acestui grup simplu și a altora încă înainte ca ele să fie realmente „descoperite". Exact așa cum simetria SU(3) a prezis existența particulei omega minus, Janko a reușit să demonstreze că, dacă ar exista un grup simplu cu anumite proprietăți, trebuia în mod categoric să constea din 175 560 de elemente. După pagini și pagini de calcule, căutarea sa a dat roade, el izbutind să construiască grupul simplu numit acum J1.

Descoperirea lui Janko a încheiat un secol de hibernare și a marcat începutul unui deceniu de descoperiri. Între 1965 și 1975, au fost construite nu mai puțin de 21 de grupuri simple sporadice, aducând totalul la 26 (în plus față de cele 18 familii). Cel mai mare dintre cele 26 de grupuri excepționale, la care ne referim de obicei cu numele de „monstrul", conține amețitorul număr de

$$808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.$$
$$710.757.005.754.368.000.000.000$$

de elemente! Pentru pasionații numerelor prime, acest număr este egal cu:

$$2^{46} \times 3^{20} \times 5^9 \times 7^6 \times 11^2 \times 13^3 \times$$
$$17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$$

Existența monstrului fusese prezisă în 1973 de matematicianul german Bernd Fischer și de americanul Robert Griess (independent), el fiind construit de Griess în 1980. Fischer a mai descoperit și alte patru grupuri sporadice, ceea ce a făcut și Janko în Australia și în Germania. În Anglia, John Conway a descoperit trei.

Identificarea celor 18 familii și a celor 26 de grupuri simple sporadice era doar punctul de plecare pentru ceea ce a reieșit a fi unul dintre cele mai impresionante și provocatoare proiecte din istoria matematicii. Scopul era clar: să se demonstreze fără echivoc că această clasificare epuiza cu adevărat toate posibilitățile de grupuri finite simple. Cu alte cuvinte, să se demonstreze că orice grup finit simplu este fie membru al uneia dintre cele 18 familii, fie al unuia dintre cele 26 de grupuri sporadice. Omul care și-a asumat responsabilitatea de a duce la bun sfârșit acest impresionant proiect, Daniel Gorenstein, l-a numit ulterior „Războiul de treizeci de ani", din cauză că o bună parte din munca de clasificare a fost desfășurată în cele trei decenii dintre 1950 și 1980.

Daniel Gorenstein (1923–1992)[38] a crescut la Boston, a studiat la Harvard și a început să se intereseze de grupurile finite pe când era student. În cel de-al Doilea Război Mondial,

el a predat matematica militarilor, contribuind astfel la efortul de război. După război, s-a întors să-și continue studiile la Harvard, iar lucrarea de doctorat și-a încheiat-o în 1950. După câțiva ani în care a lucrat mai ales în domeniul geometriei algebrice, el a revenit la grupurile finite, în 1957, și s-a implicat în clasificarea celor finite simple în anul universitar 1960–61.

În plus față de descoperirile celor 21 de noi grupuri simple sporadice, două alte evenimente au contribuit la pregătirea terenului pentru asaltul masiv asupra problemei clasificării. Unul era o prelegere ținută la Amsterdam în 1954, de către matematicianul germano-american Richard Brauer (1901–1977). În această importantă prelegere, Brauer propunea o metodă de clasificare bazată pe identificarea unor mici „nuclee" ale grupurilor simple, nuclee ce semănau din punctul de vedere al proprietăților cu grupurile-părinte. Ideea lui Brauer era de a le utiliza pe acestea ca pe un prim pas în verificarea ipotezei că orice grup arbitrar poate fi identificat cu unul dintre grupurile simple cunoscute.

Cel de-al doilea eveniment crucial pentru soarta războiului clasificării a fost demonstrarea, în 1963, de matematicienii Walter Feit și John Thompson de la Universitatea din Chicago, a unei importante teoreme. În esență, aceasta spune că orice grup finit simplu (care nu este ciclic) trebuie să aibă un număr par de elemente. Deși corectitudinea sa fusese anticipată încă din 1906, de matematicianul britanic William Burnside (1852–1927), și afirmația era cunoscută sub denumirea de *a doua conjectură a lui Burnside*, demonstrația din 1963 a umplut toate cele 255 de pagini ale unuia dintre numerele publicației *Pacific Journal of Mathematics*. Impactul demonstrației a fost enorm. Atât ideile, cât și metodele introduse prin intermediul respectivului articol au stat la baza muncii de clasificare. Așa cum scria Gorenstein în 1989[39], „În mare măsură sub impulsul teoremei ordinului impar [teorema Feit-Thompson spune că grupurile finite cu un număr impar de elemente sunt rezolubile], exista un interes stimulator pentru teoria grupurilor finite. În perioada care a urmat, de un deceniu și jumătate, o lungă listă de tineri matematicieni dotați, care aveau să joace un rol proeminent în

demonstrația clasificării, au fost atrași în domeniu.“ Înarmat cu ideile lui Brauer și cu teorema Feit-Thompson, Gorenstein a schițat în 1972 un îndrăzneț plan, în șaisprezece pași, pentru realizarea clasificării. Cu precauție, el își exprima speranța că aceasta va fi definitivată până la sfârșitul secolului XX.

Având în vedere că în activitatea de clasificare s-au implicat circa 100 de matematicieni, care au produs cam 15 000 de pagini de demonstrații, publicate în 500 de articole, estimarea inițială a lui Gorenstein nu părea exagerată. De fapt, matematicianul Ron Solomon de la Universitatea din Ohio, unul dintre liderii echipei, scria în 1995: „În afară de Gorenstein, nici un alt teoretician de marcă al grupurilor nu credea în 1972 că vom încheia clasificarea în acest secol.“ Dar așa cum este adeseori cazul în matematică, o singură persoană poate face întreaga diferență. Pentru teorema clasificării, acea persoană a fost matematicianul Michael Aschbacher de la Caltech. Printr-o serie de fulgerătoare asalturi, el a sfărâmat câteva din obstacolele majore, dinamitând porțiuni mari din demonstrație. Apelând la cuvintele lui Gorenstein:

> Au fost mulți alți teoreticieni ai grupurilor care și-au adus contribuții semnificative la demonstrația clasificării. Dar intrarea lui Aschbacher în domeniu, la începutul anilor 1970, este cea care a schimbat irevocabil peisajul grupurilor simple. Asumându-și rapid un rol conducător în demonstrarea completă a teoremei de clasificare, în următorul deceniu a tras după sine o întreagă „echipă“, până când demonstrația avea să fie terminată.

Într-adevăr, spre uimirea generală, încă din 1983 s-a crezut că demonstrația fusese încheiată. Totuși, din cauza lungimii ei excesive, Gorenstein, Solomon și matematicianul Richard Lyons și-au reunit forțele în 1982, lansând un proiect de revizuire, menit să producă o versiune mai scurtă și mai coerentă a demonstrației. În anii următori, au fost identificate câteva lacune importante ale variantei inițiale. Ultima dintre acestea a fost, în sfârșit, soluționată[40] în august 2004, printr-o lucrare în două volume scrisă de Aschbacher și matematicianul Stephen Smith, de la Universitatea din Illinois. Proiectul de revizie

Gorenstein-Lyons-Solomon înaintează și el bine, cu șase monografii deja publicate sau sub tipar. Cu toate acestea, cel puțin încă cinci ani vor mai fi necesari pentru a încheia această monumentală întreprindere.

În prezent, studierea grupurilor finite este strâns legată de o mare diversitate de alte domenii ale matematicii, de la topologie până la teoria grafurilor. Ar mai putea exista și conexiuni – bănuite, dar încă nu pe deplin explorate – cu teoria câmpului cuantic.

Galois a introdus conceptul de grup și a construit prima familie de grupuri finite simple, cu un modest scop în minte – să demonstreze care ecuații sunt rezolvabile printr-o formulă și care nu. El ar fi fost, cu siguranță, încântat să vadă la ce au dus aceste firave începuturi. Ron Solomon descria frumos rezultatele „Războiului de treizeci de ani": „Erupția matematicii în zilele de glorie ale studiului grupurilor simple a generat o uimitoare înțelegere a grupurilor finite și a descoperit multe dintre cele mai fascinante obiecte de pe firmamentul matematic."

9
Recviem pentru un geniu romantic

Dintre multele mii de matematicieni care au trăit pe pământ din vremea anticului Babilon, care a fost cel mai influent? Matematicianul și autorul Clifford Pickover[1] a condus o cercetare neoficială, punând exact această întrebare, și a prezentat clasamentul primilor zece în antrenanta sa carte *Wonders of Numbers*. Évariste Galois figurează pe listă (la numărul opt), deși acest chinuit romantic a murit la 20 de ani. Ce-i face pe unii oamenii să-i depășească atât de mult pe alții în ceea ce privește creativitatea? Și cum este posibil ca o atât de abundentă creativitate să se manifeste la o asemenea vârstă? Dacă aș putea furniza răspunsuri precise la aceste întrebări, sunt sigur că mulți psihologi, biologi, educatori și corporații m-ar aprecia foarte mult. Fiindcă nu pot, totuși, voi prezenta pe scurt câteva dintre concepțiile curente cu privire la aceste teme și voi examina dacă și cum se aplică ele la Galois.

Mai întâi, permiteți-mi să clarific că prin creativitate extraordinară înțeleg un proces care are un impact cultural semnificativ – o idee sau un act ce produce o schimbare deosebită. Exemple evidente includ întemeierea psihanalizei de către Sigmund Freud și formularea legilor mișcării de către Newton.

Psihologul Mihaly Csikszentmihalyi de la Universitatea din Chicago[2] a atras atenția că, prin însăși natura sa, creativitatea nu este doar ceva ce se întâmplă în capul cuiva. Pentru a putea declara o idee sau realizare drept „creativă", trebuie să o comparăm cu criterii sau standarde existente. De pildă, putem spune fără nici o rezervă că relativitatea generală a lui Einstein este una dintre cele mai creative teorii din toate timpurile numai

după ce o judecăm în raport cu toate celelalte teorii fizice ale universului. Creativitatea implică întotdeauna relații între cel puțin trei componente: persoana creativă; domeniul în care apare actul creator (de exemplu, matematica sau o ramură oarecare a ei, muzica, literatura); și echipa de jucători sau practicanți care acționează ca paznici și judecători (alți matematicieni, custozi de muzeu, cititori de literatură ori critici). Orice standarde am considera, Galois era uimitor de creativ. Ideile acestui tânăr au schimbat profund matematica. Noul domeniu care a luat ființă datorită lui – teoria grupurilor – s-a extins mult dincolo de frontierele matematicii pure, în artele vizuale, muzică, fizică și oriunde pot fi găsite simetrii.

Așa cum am remarcat anterior, înțelegerea sistemului de lucru al creativității nu-i intrigă numai pe specialiștii din științele cognitive, pe neurologi și pe educatori. Mari companii și corporații se străduiesc să găsească modalități de a cultiva creativitatea și inovația salariaților. Multe milioane de dolari se cheltuiesc în fiecare an pe seminare, perioade de retragere în locuri izolate, sesiuni de brainstorming și cursuri speciale, toate având scopul de a produce un alt Bill Gates. Dar oare pot fi identificate sursele creativității? Sau ideile creative or fi ivite doar întâmplător, ca niște frânturi rătăcite de cunoaștere, inteligent culese din diverse discipline, firav legate între ele?

Secretele minții creative

Poetul englez Owen Meredith[3] (pseudonimul lui Edward Robert Bulwer-Lytton, conte de Lytton) a spus cândva: „Geniul face ceea ce trebuie făcut, iar Talentul face ceea ce poate." Acesta este un citat interesant, căci el combină și pune în contrast doi termeni care pot ocazional să se suprapună cu creativitatea, dar care nu trebuie confundați cu ea – „talent" și „geniu". De-a lungul secolelor, au fost cu certitudine mulți pictori și inventatori talentați, dar foarte puțini (sau chiar nici unul) pot fi comparați cu Leonardo da Vinci în ceea ce privește creativitatea. Pe de altă parte, pentru a fi creativ – adică, pentru a produce o schimbare de paradigmă –, nu trebuie neapărat să

fii geniu. În particular, multe studii arată că peste un anumit nivel al coeficientului de inteligență[4] (IQ), probabil în jur de 120, nu există o corelație clară între inteligență și creativitate. Cu alte cuvinte, adevărata creativitate necesită probabil un oarecare grad de inteligență, dar nu există absolut nici o garanție că o persoană cu un IQ de 170 va fi cât de cât mai creativă decât una cu IQ de 120. Unul dintre principalele motive pentru care nu există nici o „explicație" a creativității este tocmai faptul că toate ființele umane sunt creative la un anumit nivel. Atunci când nu puteți deschide un borcan și luați un prosop pentru a împiedica mâna să alunece, ați găsit o soluție creativă. Atunci când un elev își scrie în palmă numărul de telefon al unui prieten, el răspunde creativ la o nevoie urgentă. La sfârșitul zilei, până și cei mai creativi oameni care au trăit vreodată tot o minte omenească trebuie să utilizeze.

O altă problemă care trebuie reținută este că exploziile creative din domenii diferite nu sunt ușor de comparat. Așa cum a observat Howard Gardner[5], cercetător din domeniul cognitivității și educației la Harvard: „Descoperirile științifice creative dintr-o sferă de activitate nu pot fi puse necritic în aceeași oală cu descoperirile științifice din alte sfere de activitate; procesul gândirii și realizările științifice ale lui Einstein diferă de acelea ale lui Freud și, chiar și mai mult, de acelea ale lui Eliot [poetul T.S. Eliot] sau Gandhi. Ideea că ar exista o singură varietate de creativitate este mitică." În pofida acestor obiecții, într-o tentativă aproape disperată de a descoperi fondul creativității, cercetătorii (inclusiv Gardner) au încercat deseori să identifice trăsăturile comune ale persoanelor creative. Printre calitățile care au fost examinate se includ aspecte fiziologice cerebrale, trăsături de personalitate, diverse caracteristici cognitive (cum ar fi capacitatea de a face asocieri îndepărtate) și circumstanțe sociologice, atât din mediul ambiant apropiat (de exemplu, familie și prieteni), cât și dintr-o sferă socială mai largă (de exemplu, etnică, politică). Ne putem face o oarecare idee despre modul în care lucrează diversele modele creative apelând la un exercițiu simplu, bazat pe conceptele metodei științifice. Aceasta din urmă folosește un model de referință

pentru a explica sistematic un grup de fenomene observate. Acest proces idealizat poate fi rezumat în trei cuvinte: inducție, deducție, verificare. Mai explicit, metoda științifică începe cu strângerea datelor privitoare la diverse fenomene observate în natură sau pe cale experimentală. Pe baza lor, se construiește un model, un scenariu sau, uneori, chiar o teorie completă. În final, modelul sau teoria se testează, prin confruntare cu noi experimente, observații sau cu un set de fenomene recunoscute, care nu au fost utilizate în formularea modelului.

Putem urmări o versiune simplă a acestei filozofii generale examinând cum poate fi evaluat Galois în raport cu un „șablon" acceptat de trăsături de personalitate ale minții creative, câtă vreme Galois însuși nu a fost utilizat la crearea acestui „șablon". Această din urmă cerință este lesne de satisfăcut – n-am găsit numele lui Galois[6] pe nici una dintre listele întocmite de cercetătorii creativității. Primul lucru pe care l-aș remarca este acela că există un foarte bun motiv pentru care am pus cuvântul „șablon" între ghilimele – nici un astfel de „șablon" nu există cu adevărat! Chiar dacă o persoană este predispusă genetic să dea dovadă de creativitate ca pictor, în cazul în care nu are acces la o educație corespunzătoare și nu se mândrește cu ceva relații în lumea artei, sunt șanse să nu auzim niciodată de ea. Mai mult decât atât, nu toți creatorii, nici măcar cei care activează în același domeniu, nu sunt asemenea. În exprimarea lui Csikszentmihalyi, „Michelangelo nu se prea da în vânt după femei, în vreme ce Picasso nu se mai sătura de ele". Similar, în Capitolul 3 am văzut că înflăcăratul Cardano a ars lumânarea la ambele capete, în vreme ce dal Ferro, care a contribuit la rezolvarea exact acelorași probleme matematice, era retras și modest. Cu toate acestea, după cum a remarcat psihologul Ellen Winner de la Boston College cu privire la copiii înzestrați: „Pentru aceia care *își fac loc* [sublinierea este a mea] în clasamentul creatorilor, un anumit set de trăsături ale personalității se dovedește de departe mai important decât a avea un IQ general înalt sau o mare abilitate specifică domeniului, chiar și una prodigioasă. Creatorii sunt persoane independente, dominante, concentrate, care știu să rișteși să apese tare pedala de accelerație." Deși

cercetătorii nu au putut discerne dacă, într-adevăr, caracteristicile personale pot fi cauzele directe ale creativității, încape puțină îndoială că anumite calități sunt puternic implicate în procesul de creație. Dar care sunt acestea? Psihologii John Dacey și Kathleen Lennon[7] pun accentul pe toleranța la ambiguitate – capacitatea de a gândi, opera și rămâne deschis la minte în situații în care regulile sunt neclare, în care nu există linii călăuzitoare sau în care sistemele de sprijinire obișnuite (de pildă familie, școală, societate) s-au prăbușit. Într-adevăr, fără competența de a funcționa acolo unde nu există reguli, Picasso n-ar fi inventat niciodată cubismul, iar Galois n-ar fi creat teoria grupurilor. Toleranța la ambiguitate este o condiție necesară pentru creativitate.

Psihologul Csikszentmihalyi se concentrează asupra unei calități oarecum înrudite, la care se referă cu termenul de „complexitate". *Complexitatea* presupune să adăpostești tendințe care, în mod normal, par a se situa la extreme opuse. Spre exemplu, mai toți oamenii se situează undeva pe la mijlocul drumului continuu dintre indisciplină totală și disciplină exagerată. Oamenii foarte creativi pot alterna între aceste două extreme cu o rapiditate uluitoare. Csikszentmihalyi a intervievat zeci de persoane, dintr-o gamă largă de domenii, întinzându-se de la arte, discipline umaniste și științe până la afaceri și politică. Pe baza acestor interviuri, a întocmit apoi o listă de zece dimensiuni ale complexității – zece perechi de caracteristici aparent antitetice[8], care sunt adeseori prezente simultan în mințile creative. Lista este următoarea:

1. Izbucniri de impulsivitate ce punctează perioadele de liniște și de repaus.
2. Dovezi de agerime, dar și de extremă naivitate.
3. Mari salturi între limitele extreme ale responsabilității și iresponsabilității.
4. Un simț înrădăcinat al realității, împreună cu o mare doză de fantezie și imaginație.
5. Perioade alternate de introversiune și extraversiune.
6. Comportament simultan umil și mândru.

7. Androginitate psihologică – fără o adeziune clară la stereotipia rolului sexului.
8. Atitudine rebelă și iconoclastă, dar și respectuoasă față de domeniul de activitate și de istoria sa.
9. Dovezi că este pasionat de ceea ce face, dar totodată și obiectiv față de propria muncă.
10. Amestecarea sentimentelor de suferință și durere cu voia bună și bucuria.

Interesant lucru, psihologul Ellen Winner consideră[9] că toți copiii minune prezintă, de obicei, numai o extremă a spectrului caracteristicilor – ele tind să fie intense, controlate și introvertite. Dar ar trebui să ne amintim că acești copii foarte dotați se află încă în stadiul de acumulare a cunoașterii, nu în cel de creativitate. Realitatea că, de regulă, ei nu devin deosebit de creativi la maturitate poate reflecta (printre altele) faptul că doar puțini posedă realmente capacitatea de a face față complexității.

Deși lista lui Csikszentmihalyi este, clar, cel mult sugestivă, ea îl descrie pe Galois uimitor de bine. Galois reprezenta, în multe privințe, culmea contradicțiilor și a complexității. Să luăm, spre exemplu, scrisoarea pe care i-a adresat-o pe 25 mai lui Auguste Chevalier: „Cum pot să mă consolez când mi-am epuizat într-o lună cea mai mare sursă de fericire pe care o poate avea un om?“ Se pot imagina salturi mai mari de dispoziție? Sau să examinăm descrierea următoare, dintr-o scrisoare trimisă de Raspail din închisoare. Comportamentul lui Galois oscilează între calm și erupție:

> Hoinărea prin curtea închisorii, într-o zi, cufundat în gânduri, ca și cum ar fi visat cu ochii deschiși. Avea înfățișare bolnăvicioasă, de om prezent numai fizic pe pământ, pe care doar gândurile îl mai țin în viață.
>
> Strașnicii noștri băieți i-au strigat: „Hei, ce dacă n-ai decât douăzeci de ani, ești om în toată firea! Nu poți să-ți iei băutura, așa-i? Băutul te sperie, nu?“ El s-a dus atunci să înfrunte pericolul în față, și-a turnat pe gâtlej o sticlă întreagă, dintr-odată, și a aruncat-o în șicanatorii săi.

A fi ager la minte, dar și naiv, realist și totodată plin de imaginație, simultan rebel și respectuos față de matematici și matematicieni, sunt combinații de trăsături ce puteau fi inventate special pentru a-l descrie pe Galois. Cum altfel i-ați caracteriza încercările de intrare la École Polytechnique, aprigele schimburi de cuvinte cu directorul școlii, paranoicele interacții cu mai marii matematicii și confruntările cu legea?

Androginitatea psihologică – a fi pe de o parte foarte sensibil, mai „feminin", pe de alta agresiv și insultător – era o altă trăsătură evidentă a lui Galois. Să considerăm următoarea epistolă, pe care i-a scris-o din închisoare mătușii sale, Céleste-Marie Guinard:

> Dragă mătușă, mi s-a spus că ești bolnavă și țintuită la pat. Simt nevoia să afli cât de rău îmi pare, iar acest sentiment este agravat și de faptul că sunt lipsit de plăcerea de a te vedea, fiindcă sunt închis în camera mea și nu pot vizita pe nimeni. Ești foarte amabilă că te-ai gândit să-mi trimiți cadouri. Este deosebit de plăcut să primești lucruri care-ți amintesc de cei vii atunci când ești într-un mormânt. Sper să te găsesc sănătoasă atunci când ies din închisoare. Prima mea vizită va fi la tine.

Greu de crezut, dar aceasta este aceeași persoană despre care matematiciana Sophie Germain i-a scris următoarele prietenului și colegului său Guglielmo Libri Carucci dalla Sommaja: „Întors acasă, el [Galois] a continuat cu obiceiul său de a insulta, despre care ți-a dat o idee după cea mai bună prelegere a ta de la Academie. Sărmana femeie [mama lui Galois] a fugit de acasă, lăsându-i fiului său doar strictul necesar ca să trăiască."

Dacey și Lennon au mai identificat câteva trăsături care, în opinia lor, contribuie la tolerarea ambiguității și la rolul ei în promovarea creativității. Pe una dintre acestea – *libertatea stimulului* – am putea s-o definim ca fiind abilitatea de a gândi în afara cutiei. În mare măsură, esența creativității este reprezentată de capacitatea de a renunța la ipotezele obișnuite și la orice prejudecată. Permiteți-mi să dau un foarte simplu exemplu de libertate a stimulului. Având șase chibrituri de lungime egală, ca cele din figura 105, ne propunem să le utilizăm pentru

a forma patru triunghiuri, cu laturi egale. Încercați să vedeți dacă reușiți, dar este bine să știți că rezolvarea necesită o metodă neconvențională. În caz că nu vă vine nici o idee, nu disperați; mulți oameni au dificultăți cu această problemă. Soluția este dată în Anexa 10. Demonstrația lui Galois privitoare la ce ecuații sunt rezolvabile printr-o formulă (Capitolul 6) este întruchiparea gândirii din afara cutiei – pentru a răspunde la o întrebare despre ecuațiile algebrice, el a inventat un întreg nou domeniu al matematicii.

Figura 105

Există și o altă caracteristică ce pare a fi împărtășită de mulți oameni creativi (în special bărbați), iar aceasta i se aplică și lui Galois – moartea timpurie a tatălui. Din aproape o sută de intervievați, toți creativi, Csikszentmihalyi a găsit că nu mai puțin de trei bărbați din zece și două femei din zece rămăseseră orfani dinainte de vârsta adolescenței.

Cum poate fi stimulată creativitatea de pierderea tatălui? Viața îi pune pe adolescenții orfani într-o situație complexă – un amestec de povară și oportunitate. Pe de o parte, povara de a trăi fără tată este imensă. Pe de alta, acești adolescenți au extraordinara oportunitate de a se inventa cu adevărat pe ei înșiși. Filozoful francez Jean-Paul Sartre[10] (1905–1980) observa în cartea sa autobiografică *Les mots* (*Cuvintele*): „Moartea lui Jean Baptiste [tatăl lui Sartre] a fost cel mai mare eveniment din viața mea: a trimis-o pe mama înapoi în lanțurile ei și mi-a dat libertate… De-ar fi trăit tata, s-ar fi așezat cu tot corpul peste mine și m-ar fi strivit. Noroc că a murit tânăr.“ Acesta este, cu siguranță, un punct de vedere peste măsură de cinic. Deși unii oameni creativi, printre care este posibil să se fi numărat inclusiv Abel și Galois, au fost mânați spre independență și curiozitate de moartea tatălui, multor altora le-a priit sprijinul primit de la familii. Există cazuri, spre exemplu, în care atât tatăl, cât și fiul au fost laureați ai Premiului Nobel. Lui Niels Bohr i s-a decernat acest premiu pentru fizică în 1922,

iar fiului său, Aage Bohr, în 1975. Un exemplu și mai impresionant este acela al lui William Henry Bragg și al fiului său William Lawrence Bragg. Echipa tată–fiu a câștigat Premiul Nobel pentru fizică în 1915, când Lawrence n-avea decât 25 de ani.

Galois și-a finalizat strălucita lucrare asupra teoriei grupurilor înainte de a fi împlinit vârsta de 21 de ani, iar geniul lui Abel a uluit lumea matematicii înainte ca acest biet matematician să fi împlinit 27 de ani. Ar trebui să fim surprinși? Nu, realmente. Unii dintre cei mai creativi matematicieni, poeți și compozitori au fost extraordinar de tineri atunci când au produs cea mai bună operă a lor. Majoritatea pictorilor, romancierilor și filozofilor, pe de altă parte, continuă să creeze și rămân adeseori în culmea gloriei și la vârste avansate. Criticul muzical și romanciera Marcia Davenport (1903–1996) a exprimat frumos această realitate: „Toți marii poeți au murit tineri. Ficțiunea este arta vârstei medii. Iar eseurile sunt arta bătrâneții."

L-am întrebat pe Sir Michael Atiyah, cel care a primit Premiul Abel în 2004, de ce crede el că matematicienii dau dovezi atât de timpurii de perspicacitate. Mi-a răspuns numaidecât:

> În matematică, dacă ești iute la minte, poți ajunge foarte repede în „linia frontului" cercetării avansate. În alte domenii, trebuie să citești mai întâi tomuri întregi. Mai mult decât atât, dacă ai activat prea multă vreme într-un anumit domeniu, devii condiționat să gândești ca oricare altul. Atunci când ești nou, nu ești silit să adopți ideile celor din jur. Cu cât ești mai tânăr, cu atât șansele de a fi original îți sunt mai mari.

Psihologul Howard Gardner face o distincție similară între matematicieni și savanți, pe de o parte, și artiști, pe de alta:

> Este important să remarcăm aici o diferență decisivă în raport cu creația din științe sau din matematică. Oamenii din aceste din urmă domenii încep să fie productivi la o vârstă timpurie și, cu certitudine, au opțiunea de a face numeroase inovații în primii lor ani. Spre deosebire de arte, aceste domenii progresează și acumulează în ritm rapid, stimulate de descoperirile celor mai creative minți; dar instrumentele făurite mai devreme în viață pot deveni irelevante sau disfuncționale.

Creativitatea matematică poate fi distinsă și de creativitățile din alte domenii științifice prin faptul că nu se supune, de obicei, așa-numitei „reguli a celor zece ani", a lui Gardner. Conform acesteia, mulți oameni creativi au mari realizări abia după zece ani de muncă. Atât Abel, cât și Galois au avut curajul să atace ecuația de gradul cinci pe când mai erau încă la liceu! Ei au dat răspunsul definitiv cu privire la rezolvabilitatea acesteia la douăzeci de ani sau puțin după aceea, cu mult mai înainte de a se aplica regula celor zece ani.

Există și un alt aspect al personalității lui Galois care se potrivește cu părerile actuale despre creativitate – faptul că el a manifestat puternice simptome de paranoia. Neîncetatele sale impresii, că este persecutat și tracasat de mediocritate, cu certitudine mergeau dincolo de normal. Adeseori au fost făcute conexiuni între genialitate și dezordine mintală. Încă din Antichitate, filozoful roman Seneca scria că „nici un mare geniu nu a existat vreodată fără o urmă de nebunie". În 1895, psihiatrul W.L. Babcock[11] a publicat un articol intitulat „Asupra eredității morbide și a predispoziției la demență ale omului de geniu", în care susținea că, asemenea înclinației spre moarte timpurie, genialitatea era și ea o caracteristică a unui bagaj genetic inferior. Pe o bază mai solidă, cercetările recente sprijină asocierea generală a creativității cu psihopatologia. Spre exemplu, psihologul Arnold Ludwig a analizat viețile[12] a peste o mie de persoane creative și a găsit că circa 28% dintre savanții proeminenți au suferit cel puțin un fel de tulburare mintală. Procentajul creștea la un amețitor 87% în cazul marilor poeți. Psihologul Donald MacKinnon, pe atunci la Institutul pentru cercetarea și evaluarea personalității de pe lângă Universitatea din California, Berkeley, a făcut o evaluare psihometrică extensivă a multor matematicieni, arhitecți și scriitori creativi. Rezultatele au arătat că oamenii creativi[13] înregistrează sistematic punctaje mai ridicate la întrebările care indică diverse afecțiuni afective, cum ar fi schizofrenia, depresia și paranoia. Concluzia ce se trage din aceste studii și din numeroase altele similare este, în cuvintele psihologului Dean Keith Simonton de la Universitatea din California, că „legătura geniu-nebunie ar putea

fi mai mult decât un mit". Trebuie să observ că, la fel ca în cazul lui Galois, rareori s-a întâmplat ca nivelurile de afecțiune să fie atât de ridicate încât să debiliteze persoana în cauză. Galois și multe alte genii creative posedau suficientă tărie de caracter și alte resurse mintale pentru a-i ajuta să țină sub control propria psihopatologie. Dar dovada în sprijinul acestui contract faustic pe care mințile creative trebuie adeseori să-l negocieze este destul de convingătoare. Eseistul englez Sir Max Beerbohm[14] (1872–1956) a exprimat astfel experiența proprie cu acest fenomen: „N-am cunoscut nici un om de geniu care nu avea de plătit, cu vreo suferință sau vreun defect fizic ori spiritual, pentru ceea ce îi dăduseră zeii."

Oricât de perfectă ar fi potrivirea lui Galois cu profilul unui geniu creativ, trebuie să ne întrebăm dacă nu cumva creierul său nu avea și vreo calitate cu totul deosebită.

Povestea a două creiere

Albert Einstein a murit pe 8 aprilie 1955, la Spitalul Princeton din New Jersey. Thomas S. Harvey, patologul care a efectuat autopsia, a scos creierul marelui savant, l-a disecat în 240 de bucăți și le-a scufundat pe acestea într-o substanță asemănătoare cu plasticul, numită celoidină.

Évariste Galois a murit pe 31 mai 1832, la Spitalul Cochin din Paris. Patologul i-a deschis craniul și a condus o examinare aprofundată a creierului. Acest lucru este cu adevărat uimitor, având în vedere că Galois fusese împușcat în stomac și că a murit de peritonită. Mai mult de jumătate din raportul de autopsie era rezervat creierului.

Timp de peste două decenii[15], nimeni, nici măcar familia lui Einstein, n-a știut că, în casa lui Harvey, creierul savantului era ținut în niște borcane. În 1978, Steven Levy, pe atunci reporter la *New Jersey Monthly*, l-a urmărit pe Harvey până la casa sa din Wichita, Kansas. După o lungă conversație cu reporterul, Harvey a admis că avea creierul. Dintr-o cutie etichetată „Cidru Costa", el a scos două borcane ce conțineau acel creier, care produsese o revoluție în știință.

De atunci, cu permisiunea lui Harvey, trei echipe au examinat diverse părți ale creierului. Anatomistul Marian Diamond de la Universitatea din California, Berkeley, și colegii săi au publicat un articol pe această temă în 1985. Ei au constatat că, într-o parte a creierului lui Einstein, raportul dintre neuroni și nevroglii[16] (celulele care sprijină și protejează neuronii) era mai mic decât în cazul a unsprezece creiere normale. Deși autorii au conchis că numărul mare de nevroglii pe neuron ar putea indica faptul că neuronii lui Einstein munceau mai mult – aveau nevoie de mai multă energie – decât normal, această interpretare a fost pusă ulterior sub semnul întrebării[17] de alți cercetători. Un al doilea articol, de Britt Anderson de la Universitatea din Alabama, Birmingham, a fost publicat în 1996. Anderson și Harvey au arătat[18]că, deși creierul lui Einstein avea o greutate inferioară celei medii (1 230 de grame în comparație cu 1 400 grame, în medie), el cuprindea mai mulți neuroni pe unitatea de suprafață. În sfârșit, în 1999, neuropsihologul Sandra Witelson și colegii ei de la Universitatea McMaster[19] au descoperit o potențială cheie a genialității lui Einstein. S-a constatat că regiunea parietală inferioară, despre care se crede că este utilizată pentru raționamente matematice, era cu 15% mai largă decât normal. În plus, s-a observat că un șanț cerebral (scizura centrală) lipsea parțial din acea zonă. Cercetătorii argumentau că absența șanțului ar fi putut avea drept rezultat o comunicație mai eficace între neuroni. Deși interesantă, toată această cercetare nu poate fi considerată drept concluzivă. La urma urmei, deși studiul lui Witelson utiliza treizeci și cinci de creiere ca grup de control, nu avea decât unul singur în grupul experimental – cel al lui Einstein.

Restul fragmentelor din creierul lui Einstein au fost duse în cele din urmă de Harvey la locul lor final de odihnă – Departamentul de Patologie al Spitalului Princeton. Întrebat de ce se zbătuse să găsească acest creier (corpul lui Einstein fusese incinerat), Harvey a explicat că s-a simțit obligat să salveze pentru posteritate prețioasa materie cenușie.

În raportul de autopsie, despre creierul lui Galois se poate citi[20]:

Despuiat de scalp, craniul prezintă cele două piese ce formează osul coronal la copiii mici unite sub un unghi obtuz. Acesta are o lățime de cel mult jumătate de centimetru. La muchia unde osul coronal suturează oasele parietale, se poate vedea o depresiune adâncă, plată, circulară, care urmează linia de alipire a celor două oase; boltiturile parietale sunt foarte dezvoltate, larg depărtate una de alta; dezvoltarea acestei porțiuni este remarcabilă, prin comparație cu osul occipital…

Odată ce craniul este deschis, pereții interiori ai sinusurilor frontale sunt foarte apropiați; spațiul rămas este mai mic de o jumătate de centimetru; în mijlocul domului craniului, două depresiuni corespund boltiturilor descrise mai sus…

Creierul este greu, circumvoluțiunile sale sunt largi, iar scizurile, adânci, în special pe părțile laterale; există protuberanțe ce se potrivesc cu cavitățile craniului; una în fața fiecărui lob anterior, două pe fața superioară; substanța cerebrală este în general moale; cavitățile ventriculare sunt mici, lipsite de orice fluide seroase; glanda pituitară este voluminoasă și conține granulații cenușii; cerebelul este mic; greutățile cerebrului și a cerebelului, luate împreună, ajung la aproape 1 530 de grame.

De ce a examinat patologul atât de aprofundat creierul lui Galois când cauza morții era evidentă? Prima propoziție din raport poate furniza o indicație: „Tânărul Galois Évariste, 21 de ani, un bun matematician, cunoscut mai cu seamă pentru imaginația sa înflăcărată, tocmai a sucombat în 12 ore de peritonită acută, cauzată de un glonț tras de la 25 de pași.“ Presupunerea mea este că patologul era împins de aceeași curiozitate care-l determinase și pe Harvey să ia creierul lui Einstein. Patologul era conștient atât de reputația lui Galois ca matematician, cât și de imaginația sa pătimașă, mistuitoare, și se simțea îndemnat să-i examineze creierul, pentru potențiale indicii privitoare la originea acestor atribute. Ca și în cazul lui Einstein, autopsia nu a dezvăluit clar nici un „revolver fumegând“. Totuși, acesta era probabil un efort care merita făcut, fiindcă scopul său era de a dezvălui mintea unei persoane ce se situa, atât în matematică, cât și în politică, în inima romantismului revoluționar.

Indivizibil

Spre deosebire de majoritatea celorlalte științe, în matematică, ideile au o valoare durabilă. Concepțiile lui Aristotel despre univers sunt curiozități istorice interesante, dar nimic mai mult. Teoremele din *Elementele* lui Euclid, pe de altă parte, sunt astăzi la fel de valabile, de corecte și de nemuritoare ca în anul 300 î.Cr. Dar asta nu înseamnă că matematica stagnează. Departe de așa ceva. Așa cum noile generații de telescoape ne lărgesc orizonturile fără a invalida neapărat descoperirile anterioare din universul apropiat, matematica dezvăluie și ea noi priveliști, în vreme ce se dezvoltă pe cunoașterea existentă. Perspectivele se pot schimba, însă nu și adevărurile. Matematicianul și autorul Ian Stewart a exprimat[21] frumos această realitate: „De fapt, în matematică există un cuvânt pentru rezultate anterioare care sunt schimbate ulterior: ele se numesc « greșeli »".

Ideile lui Galois, cu toată strălucirea lor, n-au apărut din senin. Ele și-au tras seva dintr-o problemă ale cărei rădăcini puteau fi urmărite în trecut, tocmai până în anticul Babilon. Și totuși, revoluția pe care a început-o Galois a reunit întregi domenii, care anterior nu avuseseră nici o legătură. Destul de asemănător cu explozia cambriană – acel uimitor val de diversificare a formelor de viață de pe pământ – sistemul de abstractizare introdus de teoria grupurilor a deschis ferestre spre o infinitate de adevăruri. Între domenii atât de depărtate între ele ca legile naturii și muzica au apărut deodată misterioase conexiuni. Turnul lui Babel al simetriilor s-a contopit miraculos într-o singură limbă.

Web-designerul Brenda C. Mondragon administrează un atractiv site, intitulat[22] „Neurotic Poets" („Poeți nevrotici"). Primul ei rând despre poetul romantic englez Percy Bysshe Shelley (1792–1822) spune că: „Spiritul revoluției și puterea gândirii libere erau cele mai mari pasiuni din viața lui Percy Shelley." S-ar putea întrebuința exact aceleași cuvinte pentru a-l descrie pe Galois. Pe una dintre paginile pe care le-a lăsat Galois pe pupitrul său înainte de a se duce la acel fatidic duel,

găsim o fascinantă amestecătură de mâzgăleli matematice, întreţesute cu idei revoluționare (figura 106). După două rânduri de analiză funcțională, vine cuvântul „indivizibil“, care pare să se aplice la matematică. Acest cuvânt este urmat, totuși, de lozincile revoluționare „unité, indivisibilité de la république“ („unitate, indivizibilitate a republicii“) și „Liberté, égalité, fraternité ou la mort“ („Libertate, egalitate, fraternitate sau moartea“). După aceste proclamații republicane, ca și cum totul ar face parte dintr-un neîntrerupt gând, analiza matematică se reia. Clar, în mintea lui Galois, conceptele de unitate și de indivizibilitate erau la fel de valabile pentru matematică și spiritul revoluționar. Într-adevăr, teoria grupurilor realiza exact acest lucru – o unitate și indivizibilitate a modelelor subiacente unei largi game de discipline, aparent fără legătură între ele.

Figura 106

Există și alte două grupuri de cuvinte care atrag atenția între mâzgălelile lui Galois. Unul, „Pas l'ombre", se referă aproape cert la „pas l'ombre d'un doute" („fără umbra nici unei îndoieli"). Din nou, Galois ar fi putut avea astfel de convingeri cu privire atât la corectitudinea demonstrațiilor sale matematice, cât și la idealurile lui republicane. Al doilea grup, „une femme" („o femeie") este o tristă aducere-aminte a circumstanțelor supărător de banale ce aveau să-i cauzeze prematura moarte numai câteva ore mai târziu.

Faimosul poet indian Rabindranath Tagore[23] (1861–1941) scria că „moartea nu-i stingerea luminii. Ea este suflarea în lampă, fiindcă au venit zorile." Acest lucru era cert adevărat în cazul lui Galois. Ideile sale anunțau zorile unei noi ere în matematică. El aparține foarte exclusivistului club al acelora care sunt autentic nemuritori.

Generații întregi de tineri matematicieni, mișcați de tragica poveste și de moartea fără rost a lui Galois, au găsit consolare în incredibilul său testament. Prin această satisfacție, ei au fost scutiți de soarta unora dintre tinerii mai impresionabili care, cu câteva decenii înainte de timpul lui Galois, citiseră capodopera *Suferințele tânărului Werther*, a lui Goethe. Romantica agonie a sensibilului protagonist al acestei cărți atinsese o coardă universală. Povestea era așa de impresionantă, încât a inspirat o serie de sinucideri în rândul tineretului din toată Europa. Poate că s-ar putea crede că asemenea trăiri emoționale au dispărut din lumea noastră, mult mai cinică. Și totuși, revărsarea spontană de mâhnire ce a urmat morții Prințesei Diana a demonstrat că romantismul n-a murit încă. Povestea lui Galois continuă și astăzi să întristeze și să inspire, iar spiritul operei sale penetrează mare parte din matematica modernă. Nu pot găsi cuvinte mai bune pentru a descrie acest contrast dintre perisabilitatea cărnii și rezistența ideilor decât pe cele din poemul lui Emily Dickinson[24]:

Moartea-i un Dialog între
Spirit și Țărână.
„Descompune" spune Moartea – Spiritul, „Doamnă,
Un alt Crez am" –

ANEXA 1

Problema ridicată de un joc de cărți

Iată o soluție a problemei din pagina 32. Scopul este de a aranja valeții, reginele, regii și așii într-un dreptunghi, astfel încât pe oricare rând, coloană sau pe cele două diagonale principale să nu apară de două ori o suită sau o valoare.

ANEXA 2

Rezolvarea unui sistem de două ecuații liniare

La pagina 65 , am întâlnit sistemul de ecuații de pe vremea anticului Babilon:

$$\frac{1}{4}y + x = 7$$

$$x + y = 10$$

Haideți să ne amintim cum se rezolvă asemenea sisteme de ecuații. O metodă relativ directă presupune izolarea unei necunoscute dintr-o ecuație și substituirea ei în cealaltă ecuație. Astfel, sistemul se reduce la o ecuație cu o singură necunoscută. În exemplul dat, putem scădea y din ambii membri ai ecuației a doua, transformând-o în:

$$x = 10 - y$$

Putem acum înlocui x în prima ecuație, obținând:

$$\frac{1}{4}y + 10 - y = 7$$

sau, cumulând termenii care-l conțin pe y,

$$-\frac{3}{4}y + 10 = 7$$

Scăzând 10 din ambii membri:

$$-\frac{3}{4}y = -7$$

Înmulțind ambii membri cu $\left(-\frac{4}{3}\right)$, rezultă:

$$y = 4.$$

Acum, înlocuind valoarea lui y în $x = 10 - y$, obținem: $x = 6$. Ca atare: soluția este: lungimea = 6; lățimea = 4.

ANEXA 3

Soluția lui Diofant

Aceasta reprezintă soluția lui Diofant la problema a 28-a din primul volum al lucrării *Aritmetica* (menționată la pagina 72).

Trebuie să găsim două numere astfel încât suma lor și suma pătratelor lor să fie niște numere date. Să presupunem că suma este 20 și că suma pătratelor este 208. Diofant nu notează numerele cu x și y, ci cu $10 + x$ și $10 - x$, profitând de faptul că suma trebuie să fie 20. Ecuația pe care el o obține pentru suma pătratelor este de aceea:

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$$

Acum, fiindcă: $(10+x)^2 = (10+x)(10+x) = 100 + 20x + x^2$

$(10-x)^2 = (10-x)(10-x) = 100 - 20x + x^2$

ecuația devine (după reducerea termenilor asemenea și însumarea celorlalți):

$$200 + 2x^2 = 208$$

Scăzând 200 din ambii membrii: $2x^2 = 8$

Împărțind la 2: $x^2 = 4$

Extrăgând rădăcina pătrată pozitivă: $x = 2$.

De aceea, cele două numere căutate sunt 12 și 8.

ANEXA 4

O ecuație diofantică

Trebuie să găsim soluții întregi (de genul numerelor 1, 2, 3,…) pentru ecuația (pagina 72) următoare:

$$29x + 4 = 8y$$

Putem scădea 4 din ambii membri, pentru a obține:

$$29x = 8y - 4$$

Scoțând factorul comun 4 ai ambilor termeni din membrul drept, rezultă:

$$29x = 4(2y - 1)$$

Deoarece x trebuie să fie un număr întreg și membrul stâng este divizibil cu 29, la fel trebuie să fie și membrul drept. Totuși, 29 este un număr prim (divizibil numai cu 1 și cu el însuși); de aceea, 2y – 1 trebuie să fie divizibil cu 29. În particular, am putea lua:

$2y - 1 = 29$ și $x = 4$ (pentru ca egalitatea să fie adevărată).

Adunând 1 la ambii membri ai lui $2y - 1 = 29$ și împărțind la 2, avem $y = 15$. De aceea, una dintre soluții este: $x = 4$, $y = 15$.

ANEXA 5

Versurile și formula lui Tartaglia

Regulile lui Tartaglia pentru rezolvarea celor trei forme ale cubicei erau puse în versuri (pagina 82). Traducerea de mai jos este după versiunea în limba engleză a lui Ron G. Keightley:

Atunci când cubul și necunoscuta
Împreună fac un număr întreg, cunoscut:
Găsește-ntâi două numere diferind la fel;
Produsul lor, atunci, ca și faima lor comună;
Va fi egal cu o treime, la cub, din necunoscută;
Resturile rădăcinilor lor cubice
Scăzute cum trebuie vor da, în sfârșit,
Valoarea necunoscutei, negreșit!
Cât privește a doua chestiune de felul acesta,
Când un cub într-un singuratic membru vei găsi,
Ceilalți termeni fiind împreună legați:
Două numere din acesta unul, odată ce-s descoperite,
Înmulțite, iute ca pasărea'n zbor,
Dau produs clar și simplu, de o treime
La cub a necunoscutei; cu regula știută, ia-le
Rădăcina cubică; adună-le, de vrei,
Să-ți afli tu obiectul în suma lor ușor.
Al treilea caz, acum în micile noastre sume,
Din a doua e rezolvat; căci, anume
În felul lui e același, îți spun!
Aceste lucruri le-am găsit – să nu spun asta prea târziu –
În anul de trei ori cinci sute treizeci și patru
Al epocii noastre; galanta demonstrație-i ținută
Unde orașu-i încins de al Adriaticei țărm.

Dacă ecuația cubică este de forma:

$$x^3 + px = q,$$

unde p și q sunt orice numere (de ex., $x^3 + 6x = 20$), formula de rezolvare dal Ferro-Tartaglia-Cardano este dată de oarecum intimidanta expresie:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27}} + \frac{q^2}{4}}.$$

De pildă, având $p = 6$ și $q = 20$ ca în exemplul de mai sus (și luând în considerare doar rădăcinile pătrate pozitive), obținem soluția pozitivă $x = 2$.

Dar să examinăm și ecuația studiată de Bombelli (pagina 94):

$$x^3 - 15x = 4$$

Aici, $p = -15$, $q = 4$. Puteți verifica lesne că, substituind aceste valori în formulă, obțineți:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

În acest caz, pasul intermediar presupune calcularea rădăcinii pătrate a numărului negativ -121. Și totuși, este suficientă o simplă privire pentru a ne da seama că $x = 4$ este una dintre soluții. Deși Bombelli a reușit să rezolve această ecuație particulară utilizând un artificiu ingenios, problema generală a tratării rădăcinilor pătrate din numere negative nu a fost rezolvată decât odată cu introducerea numerelor complexe.

Artificiul lui Bombelli a fost următorul: Se scrie

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + c\sqrt{-1}$$

unde valoarea lui c trebuie determinată. Se ridică ambii membri ai acestei ecuații la puterea a treia. Rezultă:

$$2 + \sqrt{-121} = (2 + c\sqrt{-1})^3.$$

Fiindcă rădăcina pătrată a lui 121 este 11, membrul stâng este egal cu $2 + 11\sqrt{-1}$. Membrul drept poate fi dezvoltat, utilizând identitatea:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

pentru a da: $8 + 12c\sqrt{-1} - 6c^2 - c^3\sqrt{-1}$.

Egalând cei doi membri și reducând termenii asemenea, obținem:

$$2 + 11\sqrt{-1} = (8 - 6c^2) + (12c - c^3)\sqrt{-1}.$$

Încercând să-i dăm lui *c* diferite valori, observăm că această ecuație este adevărată pentru $c = 1$. Din substituția lui Bombelli găsim de aceea că:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}.$$

Utilizând o substituție similară, Bombelli a găsit că:

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Substituind ambele expresii în formula lui *x*, Bombelli a dat soluția:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

ANEXA 6

Provocarea lui Adriaan van Roomen

Ecuația prezentată de van Roomen era (pagina 96):

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + 111150x^{37} - 740459x^{35} + 3764565x^{33} - 14945040x^{31} + 469557800x^{29} - 117679100x^{27} + 236030652x^{25} - 378658800x^{23} + 483841800x^{21} - 488494125x^{19} + 384942375x^{17} - 232676280x^{15} + 105306075x^{13} - 34512074x^{11} + 7811375x^{9} - 1138500x^{7} + 95634x^{5} - 3795x^{3} + 45x = C$$

unde C este un număr cunoscut. În particular, el a cerut o soluție pentru:

$$C = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{6}{16} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}}.$$

Viète, care știa deja formula pentru sinus și cosinus de $n\alpha$ (unde n este orice număr întreg, iar α este un unghi oarecare), se putea folosi de ea. El și-a dat seama că membrul stâng al ecuației este expresia pentru $2\sin 45\alpha$, dacă se exprimă în funcție de $2\sin\alpha$. De aceea, simpla găsire a valorii lui α astfel încât $2\sin 45\alpha = C$ dă soluția ecuației lui van Roomen ca fiind $x = 2\sin\alpha$.

ANEXA 7

Proprietățile rădăcinilor ecuațiilor de gradul doi

Cea mai generală ecuație de gradul doi are forma (pagina 98):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Împărțind cu *a*, obținem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Dacă, pe de altă parte, notăm soluțiile cu x_1 și x_2, ecuația se mai poate scrie și sub forma:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

din moment ce produsul este egal cu zero pentru $x = x_1$ sau $x = x_2$. Deschizând parantezele, obținem:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Comparând această expresie cu forma precedentă, vedem că soluțiile trebuie să satisfacă relațiile:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Acum haideți să examinăm expresia:

$$\frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right].$$

Întrucât:
$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$
$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

vedem că

$$\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\pm(x_1-x_2)$$

și de aceea

$$\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right]=\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm(x_1-x_2)\right]$$

de unde rezultă x_1 (dacă se alege semnul „+“) și x_2 (dacă se alege semnul „–“).

ANEXA 8

Arborele genealogic al lui Galois

Dinspre partea paternă a lui Évariste, n-am descoperit decât următoarele rude, începând cu bunicul său:

Jacques Olivier Galois (bunicul lui Évariste)
Născut în 1742, la Ozouer-le-Voulgy (Seine-et-Marne)
Căsătorit cu Marie-Jeanne Deforge (bunica lui Évariste)
Mort la Bourg-la-Reine, pe 12 mai 1806

Bunicii lui Évariste aveau șase copii:

Marie Anne Olivier Galois
Născută pe 3 noiembrie 1768
Căsătorită cu Joseph Martin Blondelot

Marie Antoinette Galois
Născută pe 20 octombrie 1770
Căsătorită cu Denis François Le Guay

Théodore Michel Galois
Născut pe 14 martie 1774
Căsătorit cu Victoire Antoinette Grivet

Nicolas-Gabriel Galois (tatăl lui Évariste)
Născut pe 3 decembrie 1775
Căsătorit cu Adélaïde Marie Demante (mama lui Évariste)
Mort pe 2 iulie 1829

Maria Pauline Galois
Născută pe 7 septembrie 1778
Căsătorită cu André Robert Hyard

Jacques Antoine Raphaël Galois
Născut în 1781

Auffray (2004) listează un alt fiu – Jean Baptiste Olivier –, dar nu i-am găsit numele în listele din Bourg-la-Reine. El scrie, de asemenea, numele mijlociu al penultimei fiice Apolline (în loc de Pauline).

Nicolas-Gabriel Galois și Adélaïde Marie Demante aveau trei copiii:

Nathalie Théodore Galois
Născută pe 26 decembrie 1808
Căsătorită cu Benoît Chantelot

Évariste Galois
Născut pe 25 octombrie 1811
Mort pe 31 mai 1832

Alfred Galois
Născut pe 18 decembrie 1814
Căsătorit cu Pauline Chantelot.

Generațiile următoare arată după cum urmează:

Natalie (1808–?) Évariste (1811–1832) Alfred (1814–?)
| |
Pauline (1833–1901) Elisabeth (1843–1855)
Căsătorită cu Felix Guinard
|
Nathalie (?–1877)

Arborele genealogic direct dinspre partea maternă a lui Évariste este:

Michel de Mante
Căsătorit cu Barbe de Criquebeuf
|
Pierre de Mante (1590–1670)
Căsătorit cu Anne Bréard
Au avut zece copii, din care cel de-al zecelea este:
|

François Demante (1645–1711)
Căsătorit cu Marguerite de Gruchy
Au avut paisprezece copii, din care cel de-al paisprezecelea este:

|

Michel Demante (1692–1766)
Căsătorit cu Anne Marguerite Leclerc
Au avut paisprezece copii, din care cel de-al șaselea este:

|

François Demante (1723–1790)
Căsătorit cu Marie-Madeleine Martin
Au avut doi copii; fiica a murit tânără

|

Thomas François Demante (1752–1823)
Căsătorit cu Marie Thérèse Élisabeth Durand

| | |

Adélaïde Marie Demante (1788–1872)
Mama lui Évariste
Căsătorită cu Nicolas-Gabriel Galois
Căsătorită a doua oară cu Jean François Loyer

Antoine-Marie Demante (1789–1856)
Căsătorită cu Anne Delaporte
Au avut șapte copii

Céleste-Marie Demante
Căsătorită cu Étienne-Gabriel Galois
Au avut șapte copii

Am o bogată paletă de informații cu privire la generațiile ce le-au urmat lui Antoine-Marie Demante și Céleste-Marie Demante, dar nu o prezint, întrucât nu este direct legată de Galois.

ANEXA 9

Puzzle-ul 14-15

Configurația inițială a puzzle-ului 14-15 a lui Samuel Loyd (pagina 184):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

poate fi schimbată în configurația următoare:

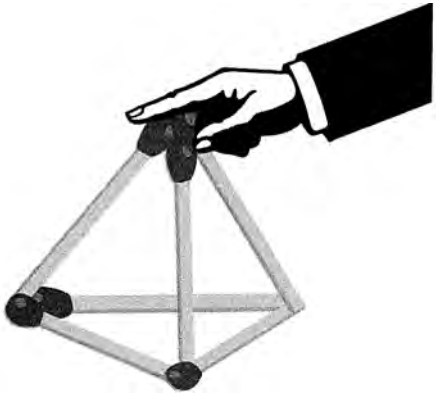
	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

utilizând 44 de mișcări. Numerele următoare indică ce piesă (în ordine) trebuie deplasată prin alunecare în locul gol: 14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7, 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14, 10, 6, 2, 1.

ANEXA 10

Soluția problemei chibriturilor

Cu cele șase chibrituri de lungime egală din Figura 105 (pagina 311), trebuie să formăm patru triunghiuri cu toate laturile egale. Tendința naivă este de a încerca rezolvarea problemei în două dimensiuni (cu chibriturile etalate pe suprafața mesei), unde nu există soluție. Soluția „din afara cutiei" este de a construi un tetraedru în trei dimensiuni (ca în figura de mai jos). Astfel se formează automat patru triunghiuri cu laturi egale.



Note

1. SIMETRIA

Două excelente cărți de popularizare a simetriei în general sunt cele scrise de Stewart (2001) și de Stewart și Golubitsky (1992). O carte extrem de recomandabilă de popularizare a simetriei în fizică este cea a lui Zee (1986). Ceva mai tehnice, cu privire la simetria în știință, sunt cărțile lui Rosen (1995) și Icke (1995). Simetria în chimie este bine descrisă în cartea lui Heilbronner și Dunitz (1993). O carte extrem de bine documentată asupra simetriilor în diferite culturi este cea a lui Washburn și Crowe (1988). Cartea lui Evans (1975) examinează simetriile în ornamentele vest-europene. Două neprețuite culegeri de articole ceva mai tehnice asupra simetriei sunt cele ale lui Hargittai (1986 și 1989). O extinsă analiză tehnică a simetriei în știință și artă poate fi găsită cartea lui Shubnikov și Koptsik (1974). O carte cu multe exemple este cea al lui Walser (2000). În fine, cartea lui Weyl (1952) rămâne o referință clasică.

[1] *…faimosul test Rorschach*: Loftus (2001); Wood, Nezworski, Lilienfeld și Garb (2003).

[2] *…Nașterea lui Venus* de Botticelli: Gombrich (1995).

[3] *Cuvântul* simetrie *are rădăcini antice*: Nagy (1995); *Oxford English Dictionary* (1978).

[4] *…arhitect roman Vitruviu*: Vitruviu cca 27 î.Cr.; Osborne (1952).

[5] *…semnificația modernă a simetriei*: Descrieri clare pot fi găsite la Rosen (1975) și Stewart și Golubitsky (1992).

[6] *Să examinăm de pildă versurile*: Shubnikov și Koptsik (1974).

[7] *Grupurile de cuvinte cu această proprietate se numesc* palindromuri: Bergeron (1973); Gardner (1979).

[8] *„Able was I ere I saw Elba”:* Fayen (1977).

[9] *…structura cromozomului masculin Y*: Skaletsky și alții (2003); Willard (2003); Rozen și alții (2003); Pagán Westphal (2003).

[10] *…simetriei bilaterale, care caracterizează regnul animal*: Comentarii excelente pot fi găsite în Weyl (1952); Gardner (1990); Gregory (1997); Corballis și Beale (1976).

[11] *…un umorist din Chicago*: „Senatorul" Clarke Crandall, descris în Gardner (1990).

[12] *O superinteligență computerizată*: Argumente excelente sunt prezentate în Kurzweil (1999).

[13] *…„The snowstorm"*: Emerson (1847).

[14] *Faimosul astronom Johannes Kepler*: Kepler (1966).

[15] *…simetrie de rotație*: Comentarii asupra ei pot fi găsite, de pildă, în Weyl (1952); Boardmann, O'Connor și Young (1973).

[16] *…pictorul James McNeill Whistler*: Whistler (1890).

[17] *Clive Bell*: Bell (1997).

[18] *Teoreticianul estetician Harold Osborne*: Osborne, (1952, 1986).

[19] *Psihologii Peter G. Szilagyi și John C. Baird*: Szilagyi și Baird (1977).

[20] *…George David Birkhoff*: Wilson (1945); O'Connor și Robertson (2001 b).

[21] *…Măsura Estetică*: Birkhoff (1933).

[22] *O brățară din fildeș de mamut*: Menționată de Wolfram (2002).

[23] *…desenele fantasticului grafician*: O superbă descriere a operei lui Escher găsiți în Schattschneider (2004).

[24] *…William Morris*: Trei cărți bune asupra vieții și operei lui sunt, de pildă, cele scrise de Parry (1996), MacCarthy (1995) și Menz (2003).

[25] *…Frumusețea Vieții*: Hares-Stryker (1997).

[26] *…simetria de translație în muzică*: Wilson (1986).

[27] *…cristalograful rus G.V. Wulff*: Shubnikov și Koptsik (1974).

[28] *Asocierea lui Mozart cu simboluri matematice*: Există multe referințe, printre care: Hyatt King (1944); Tovey (1957); Mozart (1966); Hyatt King (1976); Putz (1995).

[29] *…Johann Sebastian Bach*: Descrieri detaliate ale vieții și muzicii lui, ca și conexiuni cu matematica, pot fi găsite în Schweitzer (1967); Altschuler (1994); Wolff (2001); Wilson (1986); Smith (1996).

[30] *…reflexie cu translație*: De exemplu, în Wasburn și Crowe (1988).

[31] *…Pătrate latine*: Descrieri la nivel de popularizare pot fi găsite în Peterson (2000); Gardner (1959 a); la un nivel mai științific, în Ball și Coxeter (1974).

[32] *Permutările apar în circumstanțe extrem de diverse*: J. Rosen (1995); Boardman, O'Connor și Young (1973).

[33] *…Charles Lamb*: Lamb (1823).

[34] *Jucătorii de ruletă*: Fabricand (1989).

[35] *Perspectiva de câștig*: Să presupunem că pariați pe un anumit număr roșu. Atunci, *în medie*, puteți spera să câștigați de 18 ori la fiecare 38 de pariuri. În celelalte 20 de pariuri veți pierde. Dacă toate pariurile sunt pe 1$, atunci din 38 de pariuri, vă puteți aștepta să pierdeți 2$ (există 18 câștiguri și 20 de pierderi). Bilanțul net este deci o *pierdere* de 2$ pentru parierea a 38$, iar *așteptarea* (pierderea la fiecare dolar pariat în multe jocuri) este 2$ la fiecare pariu de 38 $ sau, mai exact, de 5,3 cenți.

[36] *…Principiul excluziunii al lui Pauli*: O scurtă descriere poate fi găsită în Gamow (1959).

[37] *…transformările de culoare*: Rosen (1975); Loeb (1971).

[38] *Escher însuși n-a știut prea bine niciodată*: Citatul apare în prefața lui MacGillavry (1976).

2. IIȚNIM IIHCO NÎ EIRTEMIS

[1] *…fotografie făcută cu Telescopul Hubble*: Brown și alții (2003).

[2] *…vedere stereoscopică*: Julesz (1960); Brindley (1970); Pinker (1997); Goldstein (2002); Wheatstone (1838).

[3] *În două cărți remarcabile*: Cărțile lui Kepler, *Astronomiae Pars Optica* (publicată în 1604) și *Dioptrice* (publicată în 1611), fac parte din *Opere Complete*; v. Caspar și Hammer (1937).

[4] *…Charles Wheatstone*: Bowers (2001).

[5] *…psihologia gestaltistă*: Descrierea principiilor ei poate fi găsită în Wetheimer (1912); Palmer (1999); Goldstein (2002); Barry (1997).

[6] *Garner și Palmer au recunoscut în special*: Garner (1974); Palmer (1991).

[7] *…teoria informației structurale*: Leeuwenberg (1971); Buffart și Leeuwenberg (1981); van der Helm și Leeuwenberg (1991).

[8] *profetul biblic Amos*: Amos 3:3.

[9] *…regiunii comune*, *conexiunii și sincroniei*: Un foarte bun rezumat în Palmer (1999).

[10] *Așa cum a spus cândva Oscar Wilde*: Wilde (1892).

[11] *…rolul important al simetriei în percepție*: Fox (1975); Howe (1980); Palmer și Hemenway (1978)

[12] *…psihologii Jennifer Freyd și Barbara Tversky*: Freyd și Tversky (1984).

[13] *…Ioannis Paraskevopoulos*: Paraskevopoulos (1968).

[14] *…rezonanța magnetică nucleară (RMN) pentru realizarea unor hărți ale ariilor cerebrale*: Tyler (2002); Tootell și alții (1998); Mendola și alții (1999).

[15] *Relația dintre simetrie și orientare*: Descrieri detaliate pot fi găsite în Rock (1973); Marr (1982); Corballis (1988); Tarr și Pinker (1989); Palmer (1999).

[16] *…filozoful moravo-austriac Ernst Mach*: Mach (1914).

[17] *…autostereograme generate pe calculator*: Tyler (1983, 1995); N.E. Thing Enterprises (1995).

[18] *Biologul Thomas Henry Huxley*: Huxley (1868).

[19] *O simetrie a legilor*: Discuții de popularizare a simetriilor legilor naturii pot fi găsite, de exemplu, în Weinberg (1992); Zee (1999); Livio (2000); Greene (2004); Kane 2000; Lederman și Hill (2004).

[20] *Teoria grupurilor*: Există multe manuale de teoria grupurilor, dar foarte puține la nivel de popularizare sau semipopularizare. Scurte prezentări de acest tip pot fi găsite, de exemplu, în Stewart (1995) și Devlin (1999, 2002). O excelentă și cuprinzătoare descriere la un nivel încă destul de elementar (dar nu de popularizare) se găsește în Budden (1972). Alte cărți de nivel elementar sunt: Gardner (1966); Maxwell (1965); McWeeny (2002). A se vedea notele la Capitolul 6 pentru alte cărți, mai avansate.

3. SĂ NU UITAȚI NICIODATĂ ACEST LUCRU CÂND VĂ CUFUNDAȚI PRINTRE ECUAȚIILE VOASTRE

[1] *…„Știință și Fericire“*: Citatul apare în Calaprice (2000).

[2] *…babilonienii nu foloseau acest concept*: Calinger (1999); van der Woerden (1983); Boyer (1991); O'Connor și Robertson (2001 a); Kline (1972).

[3] *…cunoștințele noastre asupra matematicii egiptene*: Gillings (1972); Calinger (1999); O'Connor și Robertson (2000 a, b, c); Newman (1956).

[4] *Problema 79 sună așa*: Wells (1997); Gillings (1972).

[5] …Mama Gâscă: Newman (1956).

[6] *…culegerea chinezească* Nouă Capitole asupra Artei Matematice: van der Woerden (1983).

[7] *…deputatul Tony McWalter a explicat*: În ședința din 26 iunie 2003.

[8] *Disperat, omul s-a dus la rabinul Huna*: Gandz (1940 a).

[9] *Istoricul grec Polibiu*: Gandz (1940 b).

[10] *…a doua problemă de pe tăblița numărul 13901 de la British Museum*: Berriman (1956).

[11] *…algebră geometrică*: Acest popular gen matematic este descris în van der Woerden (1983); Heath (1956, 1981); Gandz (1937).

[12] *Unul dintre cei mai originali gânditori ai Alexandriei a fost Diofant*: O parte din fascinanta lui matematică poate fi găsită în Turnbull (1993); Crossley (1987); Crossley (1987); Gow (1968); van der Woerden (1983); Vogel (1972).

[13] *…Regiomontanus nu-și ascundea admirația*: Calinger (1999).

[14] *…considerați problema a 28-a din primul său volum*: van der Woerden (1983).

[15] *…Marii teoreme a lui Fermat*: Există câteva cărți excelente despre marea teoremă a lui Fermat. O frumoasă descriere a istoriei care a condus la demonstrația lui Andrew Wiles e dată în Singh (1997) și în Aczel (1996); o expunere scurtă, dar clară a câtorva elemente de demonstrație poate fi găsită în Devlin (1999); expuneri mai detaliate, pur științifice, sunt în Edwards (1996); Mozzochi (2004).

[16] *Matematicianul și astronomul Brahmagupta*: van der Woerden (1983); Calinger (1999).

[17] *Cel care literalmente i-a dat algebrei numele pe care-l poartă acum a fost Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi*: van der Woerden (1985); Crossley (1987); O'Connor și Robertson (1999 a).

[18] *…Abraham bar Hiyya Ha-nasi*: Levey (1954); O'Connor și Robertson (1999 b).

[19] *…Omar Khayyam*: Yardley (1990); Amir-Moéz (1994).

[20] *…Maestro Benedetto … Maestro Biaggio și Antonio Mazzinghi*: van der Woerden (1985); Calinger (1999).

[21] *…Maestro Dardi*: van der Woerden (1985); Calinger (1999).

[22] *Nu-i de mirare că matematicianul și autorul Luca Pacioli*: Franci și Toti Rigatelli (1985); Taylor (1942); Livio (2002).

[23] *…un matematician din Bologna, numit Scipione dal Ferro*: van der Woerden (1985); Cardano (1993); Bortolotti (1947); Crossley (1987); Dunham (1991); Rose (1975); Masotti (1972).

[24] *…matematicienii erau interesați de asemenea confruntări*: al-Nadim (1871–72); Crossley (1987).

[25] *Niccolò Tartaglia*: Crossley (1987); Rose (1975); van der Woerden (1985); Bortolotti (1933); Di Pasquale (1957 a, b, 1958); Schultz (1984); Masotti (1972).

[26] *Zvonurile despre pretenția lui Tartaglia*: Unii istorici ai matematicii, precum Moritz Cantor (1829–1920) în *Prelegeri de istoria matematicii*, și-au exprimat scepticismul cu privire la capacitatea lui Tartaglia de a redescoperi formula lui dal Ferro. Cantor sugerează că Tartaglia ar fi putut, pur și simplu, să obțină formula pe sub mână. Alți istorici, precum Gustav Enestrőm, sunt în dezacord cu speculația lui Cantor.

[27] *…fizicianul, matematicianul, astrologul, cartoforul și filozoful Gerolamo Cardano*: Descrieri detaliate ale vieții și operei sale pot fi găsite în Cardano (1993); Fierz (1983); Ore (1953); Crossley (1987); van der Woerden (1985); Gliozzi (1972); Hale (1994).

[28] „*Chiar dacă jocul ar fi din toate privințele…*“: Ore (1953).

[29] *Ludovico Ferrari* (1522–1565) *este următorul personaj central*: Candido (1941); Di Pasquale (1957 a, b, 1958); Jayawardene (1972).

[30] *Istoria rezolvării*: Istoria ecuațiilor cubice și cuartice mai este bine descrisă și în Gindikin (1988).

[31] *Cardano a publicat horoscopurile*: Conform unei legende care este aproape sigur falsă, Cardano s-a sinucis numai pentru a-și confirma propriul horoscop.

[32] *Ea a început cu un alt bolognez, Rafael Bombelli*: van der Woerden (1985); Crossley (1987); Boyer (1991); Rose (1975); Pesic (2003).

[33] *Avocatul francez François Viète*: Ritter (1895); Crossley (1987); Pesic (2003).

[34] *Încurcat, regele a apelat la Viète*: Deși metoda trigonometrică de rezolvare schițată în Anexa 6 este corectă, e greu de crezut că Viète a fost capabil să găsească efectiv soluțiile în câteva minute.

[35] *…scoțianul James Gregory*: O'Connor și Robertson (2000 d); Whiteside (1972).

[36] *…contele german Ehrenfried Walther von Tschirnhaus*: O'Connor și Robertson (1997); Hofmann (1972); Ayoub (1980).

[37] *Francezul Étienne Bézout*: O'Connor și Robertson (2001 a); Tignol (2001).

[38] *Leonhard Euler*: Multe surse descriu viața și opera lui Euler. Cele care urmează reprezintă o colecție de surse în care accentul se pune pe elemente diferite. Youschkevitch (1972 a); O'Connor și

Robertson (1998); Wells (1997); Boyer (1991); Bell (1937); James (2002); Ayoub (1980); Tignol (2001).

[39] *…suedezul Erland Samuel Bring*: Youschkevitch (1972 b); O'Connor și Robertson (1996 a).

[40] *…francezul Alexandre-Théophile Vandermonde* (1735–1796) *și englezul Edward Waring*: van der Woerden (1985); Ayoub (1980); Tignol (2001).

[41] *Lagrange… s-a născut la Torino*: Există multe referințe. Cele care urmează pun accentul pe aspecte relevante pentru discuția de aici: van der Woerden (1985); Bell (1937); James (2002); Ayoub (1980); Kiernan (1971); Nový (1973); Stubhaug (2000); Tignol (2001).

[42] *Geniul lui Gauss fusese recunoscut*: Printre numeroasele referințe excelente, notez: Fine și Rosenberg (1997); Tignol (2001); Bell (1937); Dörrie (1965); Gray (2004).

[43] *Demonstrația lui Argand*: Fehr (1902).

[44] *…Gauss și-a exprimat scepticismul*: Gauss (1876).

[45] *…Jean Étienne Montucla*: Ayoub (1980).

[46] *Paolo Ruffini*: Cea mai bună referință este Ayoub (1980); informații interesante mai pot fi găsite în van der Woerden (1985); Carruccio (1972); Wussing (1984); Pesic (2003).

[47] *…matematicianul și astronomul francez Jean-Baptiste Joseph Delambre*: Ayoub (1980).

[48] *…Cauchy, în general rezervat cu complimentele*: Ayoub, 1980.

4. MATEMATICIANUL CHINUIT DE SĂRĂCIE

Există câteva biografii bune ale lui Abel: Una recentă și foarte bine documentată este cea a lui Stubhaug (2000). Prima biografie importantă a fost scrisă de Bjerknes (1880; în norvegiană), a cărei traducere franceză a apărut sub o formă dezvoltată în 1885. O altă excelentă biografie este cea a lui Ore (1954; în norvegiană), a cărei traducere engleză a apărut în 1957. Alte biografii, mai scurte, le aparțin următorilor autori: Mittag-Leffler (1904; în norvegiană, traducerea franceză a apărut în 1907); James (2002); de Pesloüan (1906); Ore (1972); Pesic (2003); o versiune romantică îi aparține lui Bell (1937). În plus, mai există câteva articole într-un volum memorial publicat cu ocazia centenarului nașterii lui Abel (Holst, Stormer și Sylow, 1902) și în altul, de la bicentenarul lui Abel (Laudal și Piene, 2004). Publicațiile lui Abel pot fi găsite în Sylow și Lie (1881).

[1] *…Mittag-Leffler* (1846–1927) *descria realizările matematice ale lui Abel*: Steiner (2001).

[2] *…Emil Artin… scria despre Galois*: Tignol (2001).

[3] *Demonstrația lui Abel este prea științifică*: Sylow și Lie (1881); Kiernan (1971); Kline (1972); Nový (1973) Gårding și Skau (1994). Demonstrații foarte clare, deși pur științifice, sunt prezentate în M.I. Rosen (1995); Dörrie (1965). O excelentă explicație, ceva mai puțin științifică, poate fi găsită în Pesic (2003). Asupra ecuației cvintice, a se vedea și lucrările (mai științifice) scrise de: Shurman (1997); Spearman și Williams (1994).

[4] *Era găzduit la familia Cotte*: Stubhaug (2000); Auffray (2004).

[5] *…Premiul Abel pentru matematică*: Battersby (2003); Thomas (2001).

5. MATEMATICIANUL ROMANTIC

Există mai multe biografii ale lui Galois. Cea mai recentă și bine documentată biografie (în franceză) este a lui Auffray (2004). Prima excelentă biografie a fost scrisă de Dupuy (1896). Printre alte biografii bine documentate se numără: Dalmas (1956); Sarton (1921); Rothman (1982 a, b); Taton (1972); Toti Rigatelli (1996); Astruc (1994); Verdier (2003). Alte biografii și studii biografice mai scurte sunt: Chevalier (1832); Bell (1937); Davidson (1938); Barbier (1944); Kollros (1949); Malkin (1963); Hoyle (1977); James (2002). Printre biografiile romanțate se numără: Infeld (1948); Petsinis (1998); Berloquin (1974); Mondor (1954). Materiale interesante pot fi găsite pe Internet, de exemplu, la *Gales 2004* sau *Bychan 2004*, și în O'Connor și Robertson (1996 b).

Opera matematică a lui Galois poate fi găsită în multe surse, printre care Liouville (1846); Picard (1897); Tannery (1906, 1907, 1908); Verriest (1934); Bourgne și Azra (1962); Toti Rigatelli (1996); Verdier (2003); Auffray (2004).

[1] *Évariste Galois s-a născut*: Documente asupra nașterii și arborelui său genealogic furnizate de Philippe Chaplain de la Muzeul Orașului Bourg-la-Reine.

[2] *…Liceul-internat Louis-le-Grand*: Donnay (1939).

[3] *…nu e singura analogie frapantă*: Bourgne și Azra (1962).

[4] *Richard s-a dovedit a fi, pentru Galois*: Terquem (1849).

[5] *…soluții care lasă relațiile neschimbate*: Pentru ecuația dată drept exemplu, se poate arăta că relația rămâne adevărată după efectuarea permutării:

[6] *…Cauchy trimitea academiei următoarea scrisoare de scuze*: Taton (1947, 1971, 1983); Rothman (1982 a, b).

[7] *…ca examinarea să aibă loc la exact o lună*: Dupuy (1896); Bertrand (1899); Verdier (2003).

[8] *…nu există logaritmi* aritmetici: Examinatorul, Dinet, se referise, poate, la o noțiune dezvoltată de Gauss în 1821. Aceste obiecte, pe care Gauss le-a numit *indici*, reprezintă în fapt o clasă specială de rădăcini. Acești „indici" satisfac toate proprietățile logaritmilor, de aceea ar putea fi considerați „logaritmi aritmetici".

[9] *…dând pe* 26 *iulie o infamă serie de ordonanțe*: Bérard (1834); Blanc (1841–1844); Burnand (1940); Chenu (1850); Girard (1929).

[10] *…Libertatea conducând poporul*: O excelentă descriere poate fi găsită în De Hureaux (1993).

[11] *Faimoasa matematiciană Sophie Germain*: Dahan-Dalmédico (1991); Sampson (1900–1991); James (2002); O'Connor și Robertson (1996 c).

[12] *Ea adăuga un trist comentariu*: Henry (1879).

[13] *Folosind cuvintele lui Dumas*: Dumas (1863–1865).

[14] *Procedurile legale s-au deschis*: Dalmas (1956); Verdier (2003).

[15] *Într-un raport nu prea zelos*: Bertrand (1899).

[16] *…prietenul său Ernest Duchatelet*: Auffray (2004); Verdier (2003).

[17] *…Scrisori despre închisorile Parisului*: Raspail (1839).

[18] *Descrierea făcută de Nerval*: De Nerval (1841, 1855).

[19] *Ea începe printr-o persiflare*: Bourgne și Azra (1962).

[20] *…Galois a fost transferat, pe 13 martie*: Astruc (1994); Auffray (2004).

[21] *…la un cămin de convalescenți*: Unii din biografii lui Galois au interpretat termenul *„maison de santé"* („casă de sănătate") ca desemnând o clinică medicală profesionistă. Dar pe vremea aceea expresia se referea de fapt la locuri în care oamenii veneau pentru a se odihni sau chiar pentru a petrece o vacanță. De obicei, căminele acestea ofereau, într-adevăr, o anumită supraveghere medicală și aveau un doctor rezident care trata atât probleme fizice, cât și mintale.

[22] *Puține povești de dragoste din istorie*: Bibliothèque de l'Institut, *Manuscrits d'É.Galois*, folio 59; Infantozzi (1968); Auffray

(2004); Dalmas (1956); Astruc (1994); Toti Rigatelli (1996); Rothman (1982 a, b).

[23] *Faptele cunoscute cu privire la activitățile desfășurate de Galois*: Dupuy (1896); Bourgne și Azra (1962); Rothman (1982 a, b); Toti Rigatelli (1996); Auffray (2004); Barbier (1944).

[24] *…Cristos pe cruce*: Luca 23:24.

[25] *A treia și, din perspectivă științifică, cea mai importantă scrisoare*: *Revue Encyclopédique* (1832).

[26] *…Galois refuză serviciile unui preot*: Comunicat de Gabriel Demante (vărul lui Galois) primului biograf al lui Galois, Paul Dupuy. Victor, fratele lui Galois, era preot, și el a fost probabil cel ale cărui servicii le-a refuzat Galois.

[27] *…certificatul de deces a fost semnat*: Reconstitution des Actes de l'État Civil de Paris; Archives de la Seine.

[28] *Pe 31 mai,* Bulletin de Paris *anunța*: Archives Nationales, folio 7.3886. *Șeful poliției Henri-Joseph Gisquet*: Evenimentele politice din jurul morții lui Galois sunt descrise în Hoddle (1850); Gisquet (1840–1844).

[29] *…pe deplin compatibilă cu caracterele lor*: Auffray crede că Galois nu s-ar fi referit la tânărul său prieten Duchatelet (născut pe 12 mai 1812) ca la unul dintre cei doi „bărbați" sau „patrioți" (de pildă în scrisorile sale către „toți republicanii" sau către N.L. și V.D.). Dar, în realitate, stilul lui Galois este pe deplin compatibil cu o astfel de atitudine – de a se simți obligat (după cum susține Faultrier) să păstreze secretă identitatea adversarilor săi.

[30] *…este cunoscut faptul că Dumas a greșit*: Astruc (1994) spune despre el că era „deseori lăudăros".

[31] *…aș îndrăzni să propun*: Ideea că adversarul s-ar putea să fi fost Duchatelet fusese deja avansată de Dalmas (1956), ea fiind apoi adoptată de Rothman (1982 a) în analiza lui ulterioară, care a apărut pe Internet. Cu toate acestea, Toti Rigatelli a formulat un scenariu total diferit în 1996, iar el a fost cel care a dominat discuțiile ulterioare. Importanta constatare a faptului că trebuie identificați doi adversari a fost făcută de Auffray (2004). Sugestia mea se bazează pe *întregul* material existent.

[32] *…el nu stătuse complet întors într-o parte*: Practicile precise și istoria duelurilor sunt discutate, de exemplu, în Baldick (1965).

[33] *…Riquet à la Houppe*: A apărut prima dată într-o povestire a lui Charles Perrault din 1697, inspirată de nuvela *Inès de Cordoue* a Catherinei Bernard (apărută în 1696).

[34] *El scrie în memoriile sale*: Gisquet (1840–1844).

[35] *…înmormântarea generalului*: Evenimentul este descris în Hugo (1862).

[36] *…desenat din memorie de Alfred*: Desenul a apărut în *Magasin Pittoresque*, vol. 16, iulie 1848, pp. 227–228.

[37] *Lie concluziona*: Verdier (2003).

[38] *…cu ocazia punerii plăcii comemorative*: Descrisă în ziarul *La Banlieue*, nr. 24, 20 iunie 1909.

[39] *…Tannery a încheiat cu o mișcătoare mea culpa*: Tannery (1909).

6. GRUPURILE

Printre descrierile interesante ale dezvoltării și istoriei teoriei grupurilor se numără Kiernan (1971); Tignol (2001); Nový (1973); Wussing (1984); Chandler și Magnus (1982). Un scurt rezumat este dat în Kline (1972). Dintre multele tratări (ceva mai avansate) ale grupurilor și teoriei lui Galois, recomand mai ales următoarele cărți: Rotman (1990, 1995); Stewart (2004); Tignol (2001); Fraleigh (1989); Garling (1960); Edwards (1984). Pentru o scurtă, dar strălucită aplicare a grupurilor în știință, consultați Eddington (1956).

[1] *…Sefer yetzira*: Kaplan (1990); Katz (1989).

[2] *…să examinăm operația care permută*: Un exemplu similar apare în Verdier (2003).

[3] *…puzzle 14–15*: Gardner (1959 b); Singh (1997).

[4] *Rubik a inventat cubul în 1974*: Rubik, Varga, Kéri, Marx și Vekerdy (1987).

[5] *În onoarea inventatorului:* Goudey (2001–2003).

[6] *…soluția problemei cubului*: Frey and Singmaster (1982).

[7] *Matematicianul David Joyner*: Joyner (2002).

[8] *…mulțimea tuturor permutărilor posibile*: Grupurile se numesc „comutative“ sau „abeliene“ (după Abel) dacă, pentru oricare doi membri ai grupului, ordinea în care se combină (prin legea de compoziție) nu are importanță. Adică, $x \circ y = y \circ x$ pentru orice membri ai grupului x și y. Spre exemplu, grupul tuturor numerelor întregi asociat cu operația de adunare obișnuită este abelian, căci suma oricăror doi întregi este aceeași, indiferent de ordine (de exemplu, $5 + 3 = 3 + 5 = 8$). Din tabla de pe pagina 190 putem vedea că grupul permutărilor de trei obiecte nu este abelian (de exemplu, $t_1 \circ t_2 = S_1$, iar $t_2 \circ t_1 = S_2$).

[9] *Orice grup este turnat în același mulaj*: Demonstrații riguroase ale teoremei lui Cayley se găsesc, spre exemplu, în Birkhoff și MacLane (1953) și Patterson și Rutherford (1965).

[10] *Demonstrația conține trei componente cruciale*: O expunere simplă a logicii demonstrației este prezentată în Rothman (1982 b). Demonstrații riguroase se pot găsi, spre exemplu, în: Edwards (1984); Rotman (1990); Tignol (2001); Stewart (2004). Versiunea originală a lui Galois este reprodusă în Toti Rigatelli (1996).

[11] *…combinația care dă suma celor două soluții*: În general, determinarea grupului Galois pentru ecuații de grad superior nu este ușoară.

[12] *…o problemă importantă… a găsirii unui partener de căsnicie*: Smith (1997); Cooper (1997). Problema este discutată și în Cresswell (2003).

[13] *Povestea biblică a judecătorului Ghedeon*: Judecătorii 7:2.

[14] *…loteria de recrutare din 1970*: Starr (1997); Fienberg (1971); Rosenbaum (1970).

[15] *Un studiu recent realizat de statisticienii*: Diaconis, Holmes și Montgomery (2004); Peterson (2004); Keller (1986).

[16] *„Abstracția prematură se izbește de urechi surde…"*: Kline și Alder (2000).

[17] *Viața lui Cayley*: Bell (1937); Crilly (1995); Forsyth (1895); Gray (1995); O'Connor și Robertson (1996 d).

[18] *Se începem cu patru operații*: Budden (1972).

[19] *Un extrem de complex sistem de rudenie-căsătorie*: Fletcher (1967); Fox (1967); Verdier (2003).

[20] *Extinsele analize ale lui Claude Lévi-Strauss:* Lévi-Strauss (1949, 1958).

[21] *…gramatici universale*: Această tematică a fost introdusă și discutată pe larg în lucrările lingvistului Noam Chomsky. Printre lucrările fundamentale citez: Chomsky (1966, 1968, 1975); Chomsky și Halle (1968). Pentru a căpăta o idee despre opera lui Chomsky în general, vezi Maher și Groves (1996).

[22] *…asta nu înseamnă că toate limbile*: Pennisi (2004).

[23] *…romancierul și filozoful Umberto Eco*: Vezi, spre exemplu, colecția de eseuri Eco (2004).

[24] *…iezuitul Giovanni Girolamo Saccheri*: Angelelli (1995); Emch (1933); Pascal (1914).

[25] *…postulatul al cincilea este înlocuit*: Bonola (1955); Trudeau (1987); Gray (1979); Sommerville (1960); O'Connor și Robertson (1996 a), Coxeter (1998).

[26] *János Bolyai (1802–1860)*: Szénássy (1992); Mayer (1982); Bier (1992).

[27] *…Nikolai Ivanovici Lobacevski*: Daniels (1975); Halsted (1895); Vucinich (1962).

[28] *…Eugenio Beltrami*: Chandrasekhar (1989); Bryan (1901).

[29] *Georg Friedrich Bernhard Riemann*: Interesante cărți de popularizare au fost scrise de: Derbyshire (2003); Du Sautoy (2003); Sabbagh (2003). Descrieri mai științifice ale lucrărilor de geometrie ale lui Riemann se găsesc în Portnoy (1982); Zund (1983); Scholz (1992).

[30] *Într-o prelegere fundamentală*: Yaglom (1988); Birkhoff și Bennett (1988); James (2002).

[31] *Aceste idei au fost extinse ulterior*: Prezentări deosebite ale unora dintre simetriile rezultate din lucrarea lui Klein găsiți în seriile *Mumford* și Wright (2002).

[32] *…Leopold Kronecker*: Bell (1937); Edwards (1987); James (2002).

[33] *…Charles Hermite*: Bell (1937); Belhoste (1996); James (2002); Darboux (1906).

[34] *Filozofia pe care se baza investigația lui Klein*: Klein (1884).

7. REGULILE DE SIMETRIE

Există câteva cărți de popularizare care discută rolul simetriei în legile naturii. Cea mai extinsă discuție se găsește în excelentul volum al lui Zee (1999). Alte cărți interesante: Icke (1995); Lederman și Hill (2004). Expuneri mai scurte, dar foarte clare, ale unora dintre ideile principale au fost făcute de: Weinberg (1992); Greene (1999, 2004); Penrose (2004); Kaku (1994, 2004); Gell-Mann (1994); Barrow (2003); Webb (2004).

[1] *„Natura și legile naturii…"*. Epitaf destinat lui Sir Isaac Newton.

[2] *În capodopera sa științifică*: Vezi în Chandrasekhar (1995); Motte (1995); Gleick (2003).

[3] *…viteza luminii este întotdeauna aceeași*: Excelente prezentări de popularizare a relativității restrânse și generale pot fi găsite, spre exemplu, în Kaku (2004); Greene (2004); Penrose (2004); Galison (2004); Davies (1977); Bodanis (2000); Wheeler (1990); Hawking

și Penrose (1996); Deutsch (1997). Pentru un tratat recent, vezi Schwarz și Schwarz (2004). De la părintele relativității însuși: Einstein (1953, 2001, 2004).

[4] *…au confirmat că particulele călătoare de acest gen trăiesc mai mult*: Rossi și Hall (1941); Bailey și alții (1977).

[5] *Fizicienii Joseph Carl Hafele și Richard Keating*: Hafele și Keating (1972 a, b).

[6] *…atitudinea lui Einstein față de matematica pură*: Printre prezentările utile pentru a căpăta o mai bună înțelegere a lui Einstein-omul se numără: Overbye (2000); Pais (1982); Miller (2001); Frank (1949); Fölsing (1997).

[7] *…există numai șapte modele distincte*: Budden (1972); Farmer (1996); Barrow (1995); Stevens (1996).

[8] *Forța de gravitație și forța de accelerație*: În plus față de cărțile de popularizare a relativității generale menționate mai sus, este întotdeauna edificator să examinăm articolele originale ale lui Einstein, de pildă în Stachel (1989) sau în monumentala colecție a articolelor lui Albert Einstein, publicată de Princeton University Press. Un tratat de acum clasic asupra relativității generale a fost scris de Misner, Thorne și Wheeler (1973).

[9] „*Ședeam în oficiul de brevete…*": Dintr-o conferință susținută la Kyoto în 1922. Notițele au fost luate de Yon Ishiwara și au fost traduse în august 1932, în *Physics Today*, de Y.A. Ono. Citat în Calaprice (2000).

[10] *Newton era perfect conștient*: Vezi Chandrasekhar (1995).

[11] *…a devenit ulterior cunoscut drept* paradoxul lui Ehrenfest: O analiză științifică poate fi găsită în Hill (1946).

[12] *Pe un ton neajutorat ce nu-i era caracteristic*: Citat în Kaku (2004).

[13] *Într-o conferință ținută la Academia Prusacă de Științe*: Conferința era intitulată „Geometrie și experiență". Citat în Calaprice (2000).

[14] *…schimbarea ce rezultă în funcția de undă prin modificarea coordonatei temporale*: Vezi și Weinberg (1992); Feynman, Leighton și Sands (1965). Pentru o expunere generală a mecanicii cuantice, o excelentă prezentare de popularizare a fost făcută de Lindley (1996).

[15] *Emmy Noether s-a născut în Germania, la Erlangen*: James (2002); Osen (1974); Kimberling (1972); Weyl (1935).

[16] *Noether a demonstrat teorema*: Pentru o demonstrație relativ simplă vezi Baez (2002) și „Teorema lui Noether", în Wikipedia, pe Internet.

[17] *Ele sunt compuse din blocuri constructive*: Există multe cărți de popularizare despre fizica particulelor și teoriile forțelor fundamentale. Câteva dintre cele mai bune sunt: Gell-Mann (1994); Barrow (1991); Davies (1984); Glashow (1988); Guth (1997); Weinberg (1992); Lederman (1993); Ferris (1997).

[18] *Fiziciana și autoarea Cindy Schwarz a compilat o întreagă colecție*: Schwarz (2002).

[19] *Ideile lui Lie au devenit atât de importante*: Pentru o introducere relativ accesibilă în teoria grupurilor Lie, vezi Lipkin (2002); Hall (2003).

[20] *Sophus Lie… a ajuns la matematică*: Stubhaug (2002); O'Connor și Robertson (2002).

[21] *…motivele repetitive de „tapet de hârtie" sunt limitate la 17*: De exemplu, Budden (1972). Este interesant că 13 din cele 17 clase pot fi găsite în palatul Alhambra din Granada, Spania; Grünbaum, Grünbaum și Shephard (1986).

[22] *Biblia ne spune că… israeliții*: Exodul 13:21.

[23] *Dar într-un univers care și-a început expansiunea pornind de la un Big Bang*: Lista unor foarte bune cărți de popularizare recent apărute în domeniul cosmologiei conține printre altele: Rees (1997); Guth (1997); Silk (2000); Kirshner (2002); Goldsmith (2000); Chown (2002); Tyson și Goldsmith (2004); și desigur, trebuie să-l menționez pe Livio (2000).

[24] *…relativitatea generală și mecanica cuantică par realmente*: Excelente prezentări de popularizare ale teoriei stringurilor și a altor căi potențiale de a combina gravitația cu mecanica cuantică sunt: Greene (1999, 2004); Smolin (2002); Kaku (1994); Davies (1995, 2001); Gribbin (1999). Pentru scurte treceri în revistă, vezi Witten (2004 a, b).

[25] *Afirmația fizicienilor John Schwarz… și Joël Scherk*: Afirmații oarecum similare sau legate de acestea au fost făcute independent de alți fizicieni; de exemplu, de suedezul Lars Brink și japonezul Tamiaki Yoneya.

[26] *Epocalul progres a fost făcut în 1984*: Pentru o prezentare populară, vezi Green (1986).

[27] *…cum își propune teoria stringurilor să rezolve*: Pentru un manual recent despre teoria stringurilor, vezi Zweibach (2004).

[28] *De fapt, exista chiar și o teoremă*: Demonstrată în 1967 de fizicienii Sidney Coleman și Jeffrey Mandula; Coleman și Mandula (1967).

[29] *Supersimetria este o simetrie subtilă*: Kane (2000), Greene (1999).

[30] *…cunoscute sub denumirea de* numere Grassmann: Algebra introdusă de Grassmann este cunoscută drept *algebră exterioară*.

8. CINE-I CEL MAI SIMETRIC DINTRE TOȚI?

[1] *Psihologia evoluționistă este o știință*: Excelente cărți despre psihologia evoluționistă sunt, printre altele: Dawkins (1986, 1989); Barkow, Cosmides și Tooby (1992); Pinker (1994); Buss (1999). Ideea modularității minții este discutată, de exemplu, în Fodor (1983). Alte treceri în revistă foarte bune sunt: Cosmides și Tooby (1987); Tooby și Cosmides (1990). O foarte succintă descriere generală este prezentată în Evans și Zarate (1999).

[2] *Care era problema adaptivă precisă*: Braitenberg (1984); Dennett (1988).

[3] *…circuitele din creier care transmit sentimentul de teamă*: LeDoux (1996); Kalin (1993).

[4] *Esențial pentru emoția imediată*: Davis (1992); Fanselow (1994).

[5] *…pete mari care în repaus sunt ascunse*: Lyytinen, Brakefield și Mappes (2003); Blest (1957).

[6] *În aceste experimente, efectuate de cercetătorii suedezi*: Forsman și Merilaita (1999, 2003). Treceri în revistă mai generale despre detecția asimetriei pot fi găsite în Palmer (1994); Møller și Swaddle (1997).

[7] *Omul de stat și filozoful britanic Edmund Burke*: Burke (1757).

[8] *…cartea umoristului George Burns*: Burns (1984).

[9] *…în evoluție contează și selecția sexuală*: Printre cărțile interesante despre selecția sexuală se numără cele scrise de: Ridley (2003); Buss (2003); Miller (2000).

[10] *… lucrare a biologilor William Hamilton și Marlene Zuk*: Hamilton și Zuk (1982).

[11] *Alte experimente, cu rândunele de casă*: Møller (1992, 1994).

[12] *…și cu cintezoi-zebră*: Swaddle și Cuthill (1994).

[13] *Biologul israelian Amotz Zahavi*: Zahavi (1975, 1991); Zahavi și Zahavi (1997).

[14] *…biologul suedez Magnus Enquist și inginerul britanic Anthony Arak*: Enquist și Arak (1994).

[15] *Rezultate similare a obținut într-un experiment separat, cu o rețea neuronală*: Johnstone (1994).

[16] *…după expresia psihologului evoluționist David Buss*: Buss (1999).

[17] *…până și zona din creier*: Aharon și alții (2001).

[18] *Studiile mai recente ale psihologului Judith Langlois de la Universitatea din Texas*: Langlois și Roggman (1990).

[19] *Psihologul Michael Cunningham a găsit*: Cunningham și alții (1995).

[20] *Studiile care au depășit frontierele geografice și etnice*: Discutate, spre exemplu, în Jackson (1992) și Jones (1996).

[21] *…ce găsesc, în fond, atrăgător bărbații și femeile*: O excelentă trecere în revistă este făcută în Grammer și alții (2003). Vezi și Gangestad, Thornhill and Yeo (1994); Grammer și Thornhill (1994); Thornhill and Gangestad (1996); Thornhill și Grammer (1999).

[22] *…Grammer și Anja Rikowski:* Rikowski și Grammer (1999). Vezi și Schaal și Porter (1991); Thornhill și alții (2003).

[23] *…o relație între simetrie și orgasm*: Thornhill, Gangestad și Comer (1995).

[24] *O cercetare independentă efectuată de psihologii*: Shackelford și Larsen (1997).

[25] *Ea a generat pe calculator combinații*: Langlois și Roggman (1990); Langlois, Roggman și Musselman (1994); Langlois și alții (2000).

[26] *Savantul cognitiv David Perrett*: Perrett și alții (2002). Vezi și Perrett, May și Yoshikawa (1994).

[27] *…bărbații preferă femei cu forma clasică*: Singh (1993, 1995).

[28] *Într-un interviu din 1985*: Gleason (1990).

[29] *…numit* modelul lui Elliott: Descris, spre exemplu, în Dyson (1966).

[30] *În același mod în care temperaturile de înghețare*: Pentru o prezentare concisă, de popularizare a teoriei stringurilor, vezi Witten (2004 b).

[31] *…ideile teoretice ale ruperii simetriei sunt pe calea cea bună*: În particular, utilizând cea mai economică implementare a ruperii simetriei, teoria prezice existența unei noi particule, nevăzute până acum, numită particula lui Higgs (după fizicianul scoțian Peter Higgs). Se așteaptă ca această particulă să fie produsă cu Large Hadron Collider.

[32] *„Noi venim să descriem natura…"*: Sir Michael Atiyah discută subiecte strâns legate de acesta și în Atiyah (1993).

[33] *…autorul își încheie astfel discuția*: Feynman, Leighton și Sands (1963).

[34] *…le putem reprezenta convenabil pe cadranul unui ceas*: Grupurile în muzică sunt frumos discutate de Budden (1972). Vezi și Winchel (1967); Lewin (1993). Cu privire la răspunsul fiziologic uman la sunet, vezi Maor (1994).

[35] *…mai ales Arnold Schönberg*: Schönberg (1969).

[36] *…muzica atonală*: Vezi, de exemplu, Rahn (1980).

[37] *Una dintre acele familii fusese definită*: Definiția originală i se datora lui Cauchy, dar Galois este cel dintâi care a introdus noțiunea de „grup simplu".

[38] *Povestea grupurilor finite simple sporadice*: Excelente prezentări de popularizare au fost făcute de Devlin (1999); Odifreddi (2004). O descriere ceva mai științifică găsiți în Solomon (1995). Pentru cei cu înclinații mai mari pentru matematică: Aschbacher (1994); Gorenstein (1982, 1986).

[39] *Daniel Gorenstein* (1923–1992): Aschbacher (1992).

[40] *Așa cum scria Gorenstein în 1989*: În discursul pe care l-a rostit la primirea Premiului Steele acordat de American Mathematical Society.

[41] *Ultima dintre acestea a fost, în sfârșit, soluționată*: Cele două volume *The Classification of Quasithin Groups* au apărut în numerele 111 și 112 în seria *Mathematical Surveys și Monographs* a Societății Matematice Americane.

9. RECVIEM PENTRU UN GENIU ROMANTIC

[1] *Matematicianul și autorul Clifford Pickover*: Pickover (2001).

[2] *Psihologul Mihaly Csikszentmihalyi de la Universitatea din Chicago*: Csikszentmihalyi (1996).

[3] *Poetul englez Owen Meredith*: În *Ultimele cuvinte ale unui poet sensibil de mâna a doua.*

[4] *…multe studii arată că peste un anumit nivel al coeficientului de inteligență*: Rezumate ale lor de exemplu în Gardner (1993); Simonton (1999). Vezi și Dartnall (2002); Ambrose, Cohen și Tannenbaum (2003); Rothenberg și Hausman (1976). O cuprinzătoare trecere în revistă a studiilor de creativitate a fost făcută de Sternberg (1998).

[5] *Așa cum a observat Howard Gardner*: Gardner (1993). O compilație interesantă găsiți în Brockman (1993).

[6] *…n-am găsit numele lui Galois*: O scurtă examinare a creativității lui Poincaré și Einstein este prezentată în Miller (1996). Un

mozaic de o sută de minți creative din literatură și religie este prezentat în Bloom (2002). O interesantă examinare a creativității membrilor echipei Statelor Unite la Olimpiada de Matematică este prezentată în Olson (2004). Vezi și Csikszentmihalyi (1996); Gardner (1993).

[7] *Psihologii John Dacey și Kathleen Lennon*: Dacey și Lennon (1998).

[8] *…zece perechi de caracteristici aparent antitetice*: Csikszentmihalyi (1996).

[9] *…psihologul Ellen Winner consideră*: Winner (1996).

[10] *Filozoful francez Jean-Paul Sartre*: Sartre (1964).

[11] *În 1895, psihiatrul W.L. Babcock*: Babcock (1895).

[12] *psihologul Arnold Ludwig a analizat viețile*: Ludwig (1995); Simonton (1999). Un interesant studiu anterior al acestei probleme este acela al lui Lombroso (1895).

[13] *Rezultatele au arătat că oamenii creativi*: MacKinnon (1975).

[14] *Eseistul englez Sir Max Beerbohm*: În „No. 2. The Pines."

[15] *Timp de peste două decenii*: Pe website-ul său, Steven Levy istorisește cum a găsit el creierul lui Einstein. Relatarea este reprodusă și în Abraham (2002) și Paterniti (2000).

[16] *…raportul dintre neuroni și nevroglii*: Diamond și alții (1985).

[17] *…această interpretare a fost pusă ulterior sub semnul întrebării*: Hines (1998).

[18] *Anderson și Harvey au arătat*: Anderson și Harvey (1996).

[19] *…neuropsihologul Sandra Witelson… de la Universitatea McMaster*: Witelson, Kigar și Harvey (1999).

[20] *În raportul de autopsie, despre creierul lui Galois se poate citi*: Dupuy (1896).

[21] *Matematicianul și autorul Ian Stewart a exprimat*: Stewart (2004).

[22] *…un atractiv site, intitulat*: http://www.neuroticpoets.com/shelley.

[23] *Faimosul poet indian Rabindranath Tagore*: Citat, de exemplu, pe: http://www.en.wikiquote.org/wiki/Death.

[24] *decât cele din poemul lui Emily Dickinson*: Poate fi găsit, de exemplu, pe: http://www.everypoet.com/archive/index.htm/.

Bibliografie

Abel, Niels Henrik. 1902. *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance* (Christiania: Jacob Dybwal).

Abraham, C. 2002. *Possessing Genius: The Bizarre Odyssey of Einstein's Brain* (New York: St. Martin's Press).

Aczel, A. D. 1996. *Fermat's Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem* (New York: Four Walls Eight Windows).

Aharon, I., Etcoff, N., Ariels, D., Chabris, C. E, O'Connor, E., and Breiter, H. C. 2001. „Beautiful Faces Have Variable Reward Value: fMRI and Behavioral Evidence." *Neuron,* 32(3), 537.

al-Nadim, I. 1871-72. *Kitab al-Fihrist.* J. Roediger and A. Mueller, eds. (Leipzig: FCW Vogel).

Altschuler, E. L. 1994. *Bachanalia* (Boston: Little, Brown and Company).

Ambrose, D., Cohen, L. M., and Tannenbaum, A. J., eds. 2003. *Creative Intelligence*: *Toward Theorie Integration* (Cresskill, NJ: Hampton Press).

Amir-Moéz, A. R. 1994. „Khayyam, Al-Biruni, Gauss, Archimedes, and Quartic Equations." *Texas Journal of Science*, 46, no. 3, 241.

Anderson, B., and Harvey, T. 1996. „Alterations in Cortical Thickness and Neuronal Density in the Frontal Cortex of Albert Einstein." *Neuroscience Letters,* 210, 161.

Angelelli, I. 1995. „Saccheri's Postulate." *Vivarium,* 33(1), 98.

Aschbacher, M. 1992. „Daniel Gorenstein (1923–1992)." *Notices of the AMS*, 39(10), 1190.

Aschbacher, M. 1994. *Sporadic Groups* (Cambridge: Cambridge University Press).

Astruc, A. 1994. *Évariste Galois* (Paris: Flammarion).

Atiyah, M. 1993. „Mathematics: Queen and Servant of the Sciences." *Proceedings of the American Philosophical Society,* 137, no. 4, 527.

Auffray, J.-P. 2004. *Evariste 1811–1832, le roman d'une vie* (Lyon: Aléas).

Ayoub, R. G. 1980. „Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic." *Archive for History of Exact Sciences,* 23, 253.

Babcock, W. L. 1895. „On the Morbid Heredity and Predisposition to Insanity of the Man of *Genius*." *Journal of Nervous and Mental Disease,* 20, 749.

Baez, J. 2002. http://www.math.ucr.edu/home/baez/noether.html/.

Bailey, J., et al. 1977. „Measurements of Relativistic Time Dilation for Positive and Negative Muons in a Circular Orbit." *Nature*, 268, 301.

Baidick, R. 1965. *The Duel* (London: Chapman & Hall).

Ball, W. W. R., and Coxeter, H. S. M. 1974. *Mathematical Recreations and Essays*, 12th ed. (Toronto: University of Toronto Press).

Barbier, A. 1944. Un Météore: Évariste Galois, Mathématicien 1811–1832 (manuscript in the Bourg-la-Reine collection).

Barkow, J., Cosmides, L., and Tooby, J. 1992. *The Adapted Mind: Evolutionary Psychology and the Generation of Culture* (New York: Oxford University Press).

Barrow,J. D. 1991. *Theories of Everything: The Quest for Ultimate Explanation* (Oxford: Clarendon Press).

Barrow, J. D. 1995. *The Artful Universe* (Boston: Back Bay Books).

Barrow, J. D. 2003. *The Constants of Nature: From Alpha to Omega — The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe* (New York: Pantheon).

Barry, A. M. S. 1997. *Visual Intelligence, Perception, Image, and Manipulation in Visual Communication* (Albany: State University of New York Press).

Bartusiak, M. 2000. *Einstein's Unfinished Symphony* (Washington, D.C.: Joseph Henry Press).

Battersby, S. 2003. „Will Abel Prize for Maths Rival the Nobels?" *New Scientist,* 7 June, 12.

Belhoste, B. 1996. „Autour d'un Mémoire Inédit: La Contribution d'Hermite au Développement de la Théorie des Fonctions Elliptiques." *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 2(1), 1.

Bell, C. 1997. „The Aesthetic Hypothesis." In *Aesthetics*, S. L. Feagin and P. Maynard, eds. (Oxford: Oxford University Press), 15.

Bell, E. T. 1937. *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster); reprinted in 1986.

Bell, E. T. 1951. *Mathematics, Queen and Servant of Science* (New York: McGraw-Hill).

Bérard, A. S. L. 1834. *Souvenirs historiques sur la révolution de 1830* (Paris: Perrotin).

Bergeron, H. W. 1973. *Palindromes and Anagrams* (New York: Dover Publications).

Berloquin, P. 1974. *Un Souvenir d'Enfance d'Evariste Galois* (Paris: Balland).

Berriman, A. E. 1956. „The Babylonian Quadratic Equation." *The Mathematical Gazette*, XL, no. 333, 185.

Bertrand, J. 1899. „Sur 'La vie d'Evariste Galois' par Paul *Dupuy.*" *Journal des savants*, July, 289.

Bier, M. 1992. „A Transylvanian Lineage." *The Mathematical Intelligencer*, 14(2), 52.

Birkhoff, G., and Bennett, M. K. 1988. „Felix Klein and His 'Erlanger Programm.'" In *History and Philosophy of Modern Mathematics (Minnesota Studies in the Philosophy of Science XI)*, W. Aspray and P. Kitcher, eds. (Minneapolis: University of Minnesota Press), 145.

Birkhoff, G., and MacLane, S. 1953. *A Survey of Modern Algebra* (Basing-stoke Hampshire: Collier Macmillan).

Birkhoff, G. D. 1933. *Aesthetic Measure* (Cambridge, MA: Harvard University Press).

Bjerknes, C. A. 1880. *Niels Henrik Abel: En skildring af hans Liv og vitens-kapelige Virksomhed* (Stockholm); translated into French in 1885 as *Niels Henrik Abel: Tableau, de sa vie et de son action scientifique* (Paris: Gauthier-Villars).

Blanc, L. 1841–1844. *L'Histoire de dix ans (1830–840)* (Paris: Paguerre).

Blest, A. D. 1957. „The function of eyespot patterns in the Lepidoptera." *Behaviour*, 11, 209.

Bloom, H. 2002. *Genius* (New York: Warner Books).

Boardman, A. D., O'Connor, D. E., and Young, P. A. 1973. *Symmetry and Its Application in Science* (New York: John Wiley & Sons).

Bodanis, D. 2000. $E = mc^2$ (New York: Walker).

Bonola, R. 1955. *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development* (New York: Dover).

Bortolotti, E. 1933. *I Cartelli Di Matemàtica Disfida* (Imola: Cooperation Tip. Edit. Paolo Galeati).

Bortolotti, E. 1947. *La Storia Della Matemàtica Nella Università Di Bologna* (Bologna: Nicola Zanichelli Editore).

Bourgne, R., and Azra, J. P., eds. 1962. *Ecrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois* (Paris: Gauthier-Villars).

Bowers, B. 2001. *Sir Charles Wheatstone FRS 1802–1875* (Edison, NJ: IEE Publishing).

Boyer, C. B. 1991. *A History of Mathematics,* revised by U. C. Merzbach (New York: John Wiley & Sons).

Braitenberg, V. 1984. *Vehicles* (Cambridge, MA: MIT Press).

Brindley, G. S. 1970. *Physiology of the Retina and Visual Pathway* (Baltimore: Williams & Wilkins Company).

Brockman, J., ed. 1993. *Creativity* (New York: Touchstone).

Brown, T. M., Ferguson, H. C., Smith, E., Kimble, R. A., Sweigert, A. V., Ren-zini, A., Rich, R. M., and Vandenberg, D. A. 2003. „Evidence of a Significant Intermediate-Age Population in the M31 Halo from Main-Sequence Photometry." *The Astrophysical Journal*, 592, L17.

Bryan, G. H. 1901. „Eugenio Beltrami." *Proceedings of the London Mathematical Society*, 32, 436.

Budden, F. J. 1972. *The Fascination of Groups* (Cambridge: Cambridge University Press).

Buffart, H., and Leeuwenberg, E. L. J. 1981. „Structural Information Theory." In H. G. Geissler, E. L. J. Leeuwenberg, S. Link, and V. Sarris, eds., *Modern Issues in Perception* (Berlin: Erlbaum).

Burand, R. 1943. *La vie quotidienne en France en 1830* (Paris: Hachette).

Burke, E. 1757. *A Philosophical Enquiry into the Origin of Our Ideas of the Sublime and Beautiful* (new edition published in 1998; Oxford: Oxford University Press).

Burns, G. 1984. *How to Live to Be 100—or More* (London: Robson Books).

Buss, D. M. 1999. *Evolutionary Psychology: The New Science of the Mind* (Needham Heights: Allyn & Bacon).

Buss, D. M. 2003. *The Evolution of Desire* (New York: Basic Books).
Bychan, B. 2004. „The Evariste Galois Archive." http://www.galois-group.net/.
Calaprice, A., collector and ed. 2000. *The Expanded Quotable Einstein* (Princeton: Princeton University Press).
Calinger, R. 1999. *A Contextual History of Mathematics* (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall).
Candido, G. 1941. „La risoluzione della equazione di 4- grado." *Periadico di Matematiche,* ser. IV, vol. XXI, no. 1, 21.
Cardano, G. 1993. *Ars Magna or the Rules of Algebra,* T. R. Witmer, trans. and ed. (Mineola, NY: Dover Publications); original edition 1545.
Carruccio, E. 1972. *In Dictionary of Scientific Biography, C. C.* Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).
Caspar, F. H., and Hammer, E, eds. 1937. *Johannes Kepler: Gesammelte Werke* (Munich: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung).
Chandler, B., and Magnus, W. 1982. *The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas* (New York: Springer-Verlag).
Chandrasekhar, T. R. 1989. „Non-Euclidean Geometry from Early Times to Bertram." *Indian Journal of History of Science,* 24(4), 249.
Chandrasekhar, S. 1995. *Newton's Principia for the Common Reader* (Oxford: Clarendon Press).
Chenu, A. 1850. *Les Conspirateurs* (Paris: Gamier Frères).
Chevalier, A. 1832. „Nécrologie Evariste Galois." *Revue encyclopédique*, 55, 744.
Chomsky, N. 1966. *Topics in the Theory of Generative Grammar* (The Hague: Mouton).
Chomsky, N. 1968. *Language and Mind* (New York: Harcourt Brace Jovanovich).
Chomsky, N. 1975. *The Logical Structure of Linguistic Theory* (New York: Plenum).
Chomsky, N., and Halle, M. 1968. *The Sound Pattern of English* (New York: Harper & Row).
Chown, M. 2002. *The Universe Next Door* (Oxford: Oxford University Press).
Coleman, S., and Manchila, J. 1967. „All Possible Symmetries of the S-matrix." *Physical Review*, 159, 1251.

Cooper, L. 1997. „Maths, love and men's best friend." *The Independent,* April 5.

Corballis, M. C. 1988. „Recognition of Disoriented Shapes." *Psychological Review*, 95, 115.

Corballis, M. C., and Beale, I. L. 1976. *The Psychology of Left and Right* (Hillsdale, NJ: Erlbaum).

Corballis, M. C., and Roldan, C. E. 1974. „On the Perception of Symmetrical and Repeated Patterns." *Perception and Psychophysics*, 16(1), 136–142.

Cosmides, L., and Tooby, J. 1987. „From Evolution to Behavior: Evolutionary Psychology as the Missing Link." In *The Latest on the Best: Essays on Evolution and Optimality*, J. Dupre, ed. (Cambridge, MA: MIT Press).

Coxeter, H. S. 1998. *Non-Euclidean Geometry* (Washington, DC: Mathematical Association of America).

Cresswell, C. 2003. *Mathematics and Sex* (Crows Nest NSW, Australia: Allen &Unwin).

Crilly, T. 1995. „A Victorian Mathematician: Arthur Cayley (1821–1895)." *Mathematical Gazette*, 79, 259.

Crossley, J. N. 1987. *The Emergence of Number* (Singapore: World Scientific).

Csikszentmihalyi, M. 1996. *Creativity* (New York: HarperCollins).

Cunningham, M. R., Roberts, A. R., Wu, C.-H., Barbeis, A. P., and Druen, P. B. 1995. „Their Ideas of Beauty Are, on the Whole, the Same as Ours: Consistency and Variability in the Cross-Cultural Perception of Female Attractiveness." *Journal of Personality and Social Psychology,* 68, 261.

Dacey, J. S., and Lennon, K. H. 1998. *Understanding Creativity* (San Francisco: Jossey-Bass Publishers).

Dahan-Dalmédico, A. 1991. „Sophie Germain." *Scientific American*, 265, 117.

Dalmas, A. 1956. *Évariste Galois, Révolutionnaire et Géomètre* (Paris: Fasquelle); reprinted in 1982 by Le Nouveau Commerce (Paris).

Daniels, N. 1975. „Lobachevsky: Some Anticipations of Later Views on the Relation between Geometry and Physics." *Isis*, 66, 75.

Darboux, G. 1906. „Charles Hermite." *La Revue du Mois*, l, 37.

Dannali, T., ed. 2002. *Creativity, Cognition, and Knowledge* (Westport, CT: Praeger).
Davidson, G. 1938. „The Most Tragic Story in the Annals of Mathematics." *Scripta, Mathematica*, 6, 95.
Davies, P. 1977. *Space and Time in the Modern Universe* (Cambridge: Cambridge University Press).
Davies, P. 1995. *About Time* (New York: Simon & Schuster).
Davies, P. 2001. *How to Build a Time Machine* (New York: Allen Lane).
Davies, P. C. W. 1984. *Superforce* (New York: Simon & Schuster).
Davis, M. 1992. „The role of the amygdala in fear-potentiated startle: Implications for animal models of anxiety." *Trends in Pharmacological Science*, 13, 35.
Dawkins, R. 1986. *The Blind Watchmaker* (New York: W. W. Norton).
Dawkins, R. 1989. *The Selfish Gene* (Oxford: Oxford University Press). De Hureaux, A. D. 1993. *Delacroix* (Paris: Editions Hazau). De la Hodde, L. 1850. *Histoire des sociétés secrètes et du parti républicain de1830 à 1848* (Paris: Julien et Lanier).
De Nerval, G. 1841. „Mémoire d'un Parisien." *L'Artiste*, April 11.
De Nerval, G. 1855. „Mes Prisons." In *La bohème galante* (Paris: Michel Lévy).
Dennett, D. C. 1988. In *Sourcebook on the Foundations of Artificial Intelligence*, Y. Wilks and D. Partridge, eds. (Albuquerque: New Mexico University Press).
De Pesloüan, C. L. 1906. *N. H. Abel, sa vie et son oeuvre* (Paris: Gauthier-Villars).
Derbyshire, J. 2003. *Prime Obsession* (Washington, DC: Joseph Henry Press).
Deutsch, D. 1997. *The Fabric of Reality* (New York: Allen Lane).
Devlin, K. 1999. *Mathematics, the New Golden Age* (New York: Columbia University Press).
Devlin, K. 2002. *The Millennium Problems* (New York: Basic Books).
Diaconis, P., Holmes, S., and Montgomery, R. 2004. „Dynamical Bias in the Coin Toss." http://www-stat.stanford.edu/~susan/papers/headswithJ.pdf/.
Diamond, M. C., Scheibel, A. B., Murphy, G. M. Jr., and Harvey, T. 1985. „On the Brain of a Scientist: Albert Einstein." *Experimental Neurology*, 88, 198.

Di Pasquale, L. 1957a. „La equazioni di terzo gradi nei 'Quesiti et inventioni diverse' di Niccolò Tartaglia." *Periodico di Matematiche*, ser. IV, vol. XXXV, no. 2, 79.

Di Pasquale, L. 1957b. „I cartelli di matematica disfida di Ludovico Ferrari e i controcartelli di Niccolò Tartaglia." *Periodico di Matematiche*, ser. IV, vol. XXXV, no. 5, 253.

Di Pasquale, L. 1958. „I cartelli di matematica disfida di Ludovico Ferrari e i controcartelli di Niccolo Tartaglia (continuazione e fine)." *Periodico di Matematiche*, ser. IV, vol. XXXVI, no. 3, 175.

Donnay, Maurice. 1939. *Le Lycée Louis-le-Grand* (Paris: Nouvelle Revue Française).

Dörrie, H. 1965. *100 Great Problems of Elementary Mathematics* (New York: Dover Publications).

Dumas, A. 1862–1865. *Mes mémoires* (Paris: Caiman-Levy).

Dunham, W. 1991. *Journey Through Genius* (New York: Penguin Books); first published in 1990 by John Wiley & Sons (New York).

Dunnington, G. W. 1955. *Gauss, Titan of Science* (New York: Hafner Publishing); reprinted 2004 by The Mathematical Association of America, with additional material by J. Gray and F.-E. Dohse (Washington, DC).

Dupuy, P. 1896. „La Vie d'Évariste Galois." *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*; 3rd ser., 13, 197. Reprinted as a book in 1992 by Éditions Jacques Gabay.

Du Sautoy, M. 2003. *The Music of the Primes* (New York: Harper Collins).

Dyson, F. J. 1966. *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics* (New York: W. A. Benjamin).

Eco, U. 2004, *On Literature*, trans. M. McLaughlin (Orlando, FL: Harcourt).

Eddington, A. S. 1956. „The Theory of Groups." In *The World of Mathematics*, J. R. Newman, ed. (New York: Simon & Schuster), 1558.

Edwards, H. M. 1984. *Galois Theory* (New York: Springer).

Edwards, H. M. 1987. „An Appreciation of Kronecker." *The Mathematical Intelligencer*, 9, 28.

Edwards, H. M. 1996. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic N umber Theory* (Berlin: Springer-Verlag).

Einstein, A. 1953. *The Meaning of Relativity* (Princeton: Princeton University Press).

Einstein, A. 2001. *Relativity: The Special and the General Theory* (New York: Routledge).

Einstein, A. 2004. *Einstein's 1912 Manuscript on the Special Theory of Relativity* (New York: George Braziller).

Eisenman, R., and Rappaport, J. 1967. „Complexity Preference and Semantic Differential Ratings of Complexity-Simplicity and Symmetry-Asymmetry." *Psychonomic Science*, 7(4), 147–148.

Emch, A. F. 1933. *The „Legia Demonstrativa" of Girolamo Saccheri* (Cambridge, MA: Harvard).

Emerson, R. W. 1847. *Poems.* In *Ralph Waldo Emerson: Collected Poems and Translations*, P. Kaye and H. Bloom, eds. (New York: Library of America, 1994).

Enquist, M., and Arak, A. 1994. „Symmetry, Beauty and Evolution." *Nature,* 372, 169.

Evans, D., and Zarate, O. 1999. *Introducing Evolutionary Psychology* (Cambridge, England: Icon Books).

Evans, J. 1975. *Pattern* (New York: Hacker Art Books).

Fabricand, B. P. 1989. „Symmetry in Free Markets." *Computers & Mathematics with Applications*, 17, nos. 4-6, 653.

Fanselow, M. S. 1994. „Neural Organization of the Defensive Behavior System Responsible for Fear." *Psychonomic Bulletin and Review*, 1, 429.

Farmer, D. W. 1996. *Groups and Symmetry: A Guide to Discovering Mathematics* (Providence, RI: American Mathematical Society).

Fayen, G. 1977. „Ambiguities in Symmetry-Seeking: Borges and Others." In *Patterns of Symmetry,* M. Sénéchal and George Fleck, eds. (Amherst: University of Massachusetts Press), 104.

Fehr, H. 1902. *Intermédiaire des mathématiciens*, 9, 74.

Ferris, T. 1997. *The Whole Shebang* (New York: Simon & Schuster).

Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. 1963. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. 1965. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. III (Reading, MA: Addison-Wesley).

Fienberg, S. E. 1971. „Randomization and Social Affairs: The 1970 Draft Lottery." *Science*, 171, 255.

Fierz, M. 1983. *Girolamo Cardano 1501–1576* (Boston: Birkhäuser).
Fine, B., and Rosenberger, G. 1997. *The Fundamental Theorem of Algebra* (Berlin: Springer-Verlag).
Fletcher, D. J. 1967. „Carry On Kariera." *Mathematics Teaching,* 43, 35.
Fodor, J. 1983. *The Modularity of Mind: An Essay on Faculty Psychology* (Cambridge, MA: MIT Press).
Folsing, A. 1997. *Albert Einstein* (New York: Viking).
Forsman, A., and Merilaita, S. 1999. „Fearful Symmetry: Pattern Size and Asymmetry Affects Aposematic Signal Efficacy." *Evolutionary Ecology*, 13, 131.
Forsman, A., and Merilaita, S. 2003. „Fearful Symmetry? Intra-Individual Comparisons of Asymmetry in Cryptic vs. Signaling Colour Patterns in Butterflies." *Evolutionary Ecology*, 17, 491.
Forsyth, A. R. 1895. „Arthur Cayley." *Proceedings of the Royal Society of London*, 58, 1.
Fox, J. 1975. „The Use of Structural Diagnostics in Recognition. „*Journal of Experimental Psychology*, 104(1), 57-67.
Fox, R. 1967. *Kinship and Marriage: An Anthropological Perspective* (Harmondsworth, England: Penguin Books).
Fraleigh, J. B. 1989. *A Fast Course in Abstract Algebra* (Reading, MA: Addison-Wesley).
Franci, R., and Toti Rigatelli, L. 1985. „Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca *Pucioli.*" *Janus*, 72 (1–3), 17.
Frank, P. 1949. *Einstein: His Life and His Thoughts* (New York: Alfred A. Knopf).
Frey, A. H. Jr., and Singmaster, D. 1982. *Handbook of Cubik Math* (Hillside, NY: Enslow Publishers).
Freyd, J., and Tversky, B. 1984. „Force of Symmetry in Form Perception." *American Journal of Psychology*, 97(1), 109–126.
Gales, F. 2004. http://perso.wanadoo.fr/frederic.gales/Laviedegalois.htm/.
Galison, P. 2004. *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps* (New York: W. W. Norton).
Gamow, G. 1959. „The Exclusion Principle." *Scientific American,* 201, no. 1, 74.

Gandz, S. 1937. „The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra." *Osiris,* vol. III, 405.

Gandz, S. 1940a. „Studies in Babylonian Mathematics III: Isoperimetric Problems and the Origin of the Quadratic Equations." *Isis*, 32,103; quotes *Talmud*, „Sotah" IV, 4.

Gandz, S. 1940b, ibid.; quotes from Heath 1956.

Gangestad, S. W., Thornhill, R, and Yeo, R. A. 1994. „Facial Attractiveness, Developmental Stability, and Fluctuating Asymmetry." *Ethology and Sociobiology*, 15, 73.

Carding, L., and Skau, C. 1994. „Niels Henrik Abel and Solvable Equations." *Archive for the History of Exact Sciences*, 48, 81.

Gardner, H. 1993. *Creating Minds* (New York: Basic Books).

Gardner, K. L. 1966. *Discovering Modern Algebra* (Oxford: University Press).

Gardner, M. 1959a. „Mathematical Games: How three modern mathematicians disproved a celebrated conjecture of Leonhard Euler." *Scientific American*, 201 (November), 181.

Gardner, M. 1959b. *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* (New York: Dover).

Gardner, M. 1979. *Mathematical Circus* (New York: Alfred A. Knopf).

Gardner, M. 1990. *The New Ambidextrous Universe: Symmetry and Asymmetry from Mirror Reflections to Superstrings* (New York: W. H. Freeman and Company).

Garling, D. J. H. 1960. *A Course in Galois Theory* (Cambridge: Cambridge University Press).

Garner, W. R. 1974. *The Processing of Information and Structure* (Hillsdale, NJ: Erlbaum).

Gauss, C. F. 1876. *Collected Works,* vol. 3 (in German, published in 1969 and in 1987 by Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht; there are also several publications by G. Olms, Hildesheim).

Gell-Mann, M. 1994. *The Quark and the Jaguar* (San Francisco: W. H. Freeman).

Gillings, R. J. 1972. *Mathematics in the Time of the Pharaohs* (Cambridge, MA: MIT Press).

Gindikin, S. G. 1988. *Tales of Physicists and Mathematicians* (Boston: Birkhäuser).

Girard, G. 1929. *Les Trois Glorieuses* (Paris: Firmin Didot).
Gisquet, H. J. 1840–1844. *Mémoires de M. Gisquet, ancien préfet de police, écrits par lui-même* (Bruxelles: Meline et Cans).
Glashow, S. 1988. *Interactions* (New York: Time-Warner Books).
Gleason, A. M. 1990. In *More Mathematical People,* D. J. Albers, G. L. Alexanderson, and C. Reed, eds. (Boston: Harcourt Brace Jovanovich).
Gleick, J. 2003. *Isaac Newton* (New York: Pantheon).
Gliozzi, M. 1972. *In Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).
Goldsmith, D. 2000. *The Runaway Universe: The Race to Discover the Future of the Cosmos* (New York: Perseus Publishing).
Goldstein, E. B. 2002. *Sensation and Perception* (Pacific Grove, CA: Wadsworth).
Gombrich, E. H. 1995. *The Story of Art,* 16th edition (London: Phaidon Press Inc.).
Goodman, R. 2004. „Alice Through Looking Glass After Looking Glass: The Mathematics of Mirrors and Kaleidoscopes." *The American Mathematical Monthly,* 111(4), 281.
Gorenstein, D. 1982. *Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification* (New York: Plenum Press).
Gorenstein, D. 1985. „The Enormous Theorem. „ *Scientific American,* 253, 104.
Gorenstein, D. 1986. „Classifying the Finite Simple Groups." *Bulletin of the American Mathematical Society,* 14, 1.
Goudey, C. 2001-2003. http://cubeland.free.fr/infos/infos.htm/.
Gow, J. 1968. *A Short History of Greek Mathematics* (New York: Chelsea Publishing Company).
Grammer, K., Fink, B., Møller, A. P., and Thornhill, R. 2003. „Darwinian Aesthetics: Sexual Selection and the Biology of Beauty." *Biological Reviews*, 78, 385.
Grammer, K., and Thornhill, R. 1994. „Human (Homo Sapiens) Facial Attractiveness and Sexual Selection: The Role of Symmetry and Average-ness. „ *Journal of Comparative Psychology*, 108, 233.
Gray, J. 2004. *Gauss: Titan of Science* (Cambridge: Cambridge University Press).
Gray, J. J. 1979. „Non-Euclidean Geometry—A Reinterpretation." *Historia Mathematica*, 6(3), 236.

Gray, J. J. 1995. „Arthur Cayley (1821–1895).“ *The Mathematical Intelligencer*, 17(4), 62.
Green, M. B. 1986. „Superstrings.“ *Scientific American*, 255, 48.
Greene, B. 1999. *The Elegant Universe* (New York: W. W. Norton).
Greene, B. 2004. *The Fabric of the Cosmos* (New York: Alfred A. Knopf).
Gregory, R. 1997. *Mirrors in Mind* (New York: W. H. Freeman).
Gribbin, J. 1999. *The Search for Superstrings, Symmetry, and the Theory of Everything* (New York: Little, Brown and Company).
Grünbaum, B., Grünbaum, Z., and Shephard, G. C. 1986. In *Symmetry,* I. Hargittai, ed. (New York: Pergamon Press), 641.
Guth, A. H. 1997. *The Inflationary Universe* (Reading, MA: Helix Books).
Hafele, J. C., and Keating, R. E. 1972a. „Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains.“ *Science*, 177, 166.
Hafele, J. C, and Keating, R. E. 1972b. „Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains.“ *Science*, 177, 168.
Hale, J. 1994. *The Civilization of Europe in the Renaissance* (New York: Atheneum).
Hall, B. C. 2003. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations* (Berlin: Springer-Verlag).
Halsted, G. B. 1895. „Biography, Lobachevsky.“ *American Mathematical Monthly,* 2, 137.
Hamilton, W. D., and Zuk, M. 1982. „Heritable True Fitness and Bright Birds: A Role for Parasites?“ *Science,* 218, 384.
Hares-Stryker, C., ed. 1997. *An Anthology of Pre-Raphaelite Writings* (New York: New York University Press), 284.
Hargittai, I. 1986. *Symmetry: Unifying Human Understanding* (New York: Pergamon Press).
Hargittai, I. 1989. *Symmetry 2: Unifying Human Understanding* (New York: Pergamon Press).
Hawking, S.,and Penrose, R. 1996. *The Nature of Space and Time* (Princeton: Princeton University Press).
Heath, T. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (New York: Dover Publications).
Heath, T. 1981. *A History of Greek Mathematics* (New York: Dover Publications).

Heilbronner, E., and Dunitz, J. D. 1993. *Reflections on Symmetry* (Basel: Verlag Helvetica Chimica Acta).

Henry, C. 1879. „*Manuscrits de Sophie Germain.*“ *Revue philosophique de la France et de l'étranger,* 8, 619.

Hill, E. L. 1946. „A Note on the Relativistic Problem of Uniform Rotation.“ *Physical Review*, 69, 488.

Hines, T. 1998. „Further on Einstein's Brain.“ *Experimental Neurology*, 150, 343.

Hodde, L. D. L. 1850. *Histoire de sociétés secrètes et du parti républicain de 1830 à 1848* (Paris: Julien, Lanier et Cie).

Hofmann, J. E. 1972. *In Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Hofstadter, D. R. 1979. *Godei, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (New York: Basic Books).

Holst, E., Stornier, C., and Sylow, L., eds. 1902. Festskrift ved hundreaarsju-biloeet for Niels Henrik Abel fosdel (Christiania).

Howe, E. S. 1980. „Effects of Partial Symmetry, Exposure Time, and Backward Masking on Judged Goodness and Reproduction of Visual Patterns.“ *Quarterly Journal of Experimental Psychology,* 32, 27.

Hoyle, F. 1977. *Ten Faces of the Universe* (San Francisco: W. H. Freeman and Company).

Hugo, V. 1862. *Les Misérables* (Bruxelles: A. Lacroix, Verboeckhoven & Cie.), translated by C. E. Wilbour (New York: Modern Library, 1902).

Huxley, T. H. 1868. „A Liberal Education.“ http://human-nature.com/ darwin/huxley/chap2.html.

Hyatt King, A. 1944. „Mozart's Piano Music.“ *The Music Review*, 5, 163–191.

Hyatt King, A. 1976. *Mozart in Retrospect* (Westport, CT: Greenwood Press).

Icke, V. 1995. *The Force of Symmetry* (Cambridge: Cambridge University Press).

Infantozzi, C. A. 1968. „Sur la mort d'Evariste Galois.“ *Revue d'histoire des sciences*, 21, 1968.

Infeld, L. 1948. *Whom the Gods Love: The Story of Évariste Galois* (New York: Whittlesey House, McGraw-Hill).

Jackson, L. A. 1992. *Physical Appearance and Gender: Sociobiological and Sociocultural Perspectives* (Albany: State University of New York Press).

James, I. 2002. *Remarkable Mathematicians: From Euler to von Neumann* (Cambridge: Cambridge University Press).

Jayawardene, S. A. 1972. *In Dictionary of Scientific Biography*, *C. C.* Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Johnstone, R. A. 1994. „Female Preference for Symmetrical Males as a By-Product of Selection for Mate Recognition." *Nature*, 372, 172.

Jones, D. 1996. *Physical Attractiveness and the Theory of Sexual Selection* (Ann Arbor: University of Michigan Press).

Joyner, D. 2002. *Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine and Other Mathematical Toys* (Baltimore: Johns Hopkins University Press).

Julesz, B. 1960. „Binocular Depth Perception of Computer-Generated Patterns." *Bell System Technical Journal*, 39, 1125.

Kaku, M. 1994. *Hyperspace* (New York: Oxford University Press).

Kaku, M. 2004. *Einstein's Cosmos* (New York: Atlas Books).

Kaiin, N. H. 1993. „The Neurobiology of Fear." *Scientific American*, May, 94.

Kane, G. L. 2000. *Supersymmetry: Unveiling the Ultimate Laws of Nature* (New York: Perseus).

Kaplan, A. 1990. *Sefer Yetzira: The Book of Creation: In Theory and Practice* (Boston: Weiser).

Katz, V. 1989. „Historical Notes," in Fraleigh 1989.

Keiner, I. 1986. „The Evolution of Group Theory: A Brief Survey." *Mathematics Magazine*, 59(4), 195.

Keller, J. B. 1986. „The Probability of Heads." *American Mathematical Monthly*, 93, 191.

Kepler, J. 1966. *The Six-Cornered Snowflake* (Oxford: Oxford University Press; originally published in 1611).

Keyser, C. J. 1956. „The Group Concept." In *The World of Mathematics*, vol. 3, J. R. Newman, ed. (New York: Simon & Schuster; republished in 2000, Mineola, NY: Dover).

Kiernan, B. M. 1971. „The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin." *Archive for History of Exact Sciences,* 8, 40.

Kimberling, C. 1972. „Emmy Noether." *American Mathematical Monthly*, 79, 136.

Kirshner, R. P. 2002. *The Extravagant Universe: Exploding Stars, Dark Energy and the Accelerating Cosmos* (Princeton: Princeton University Press).

Klein, F. 1884. *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*, *G.* G. Morrice, trans. Published in 1956 by Dover (New York).

Kline, H. M., and Alder, M. 2000. www.marco-learningsystems.com/pages/kline/johnny/johnny-chapt7-8.html/.

Kline, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press).

Kollros, L. 1949. „Evariste Galois." *Elemente der Mathematik,* no. 7, 1 (Basel: Verlag Birkhäuser).

Kurzweil, R. 1999. *The Age of Spiritual Machines* (London: Orion Business Books).

Lamb, C. 1823. „Essays of Elia: The Two Races of Men." In *The Norton Anthology of English Literature*, 6th edition, vol. 2 (New York: W. W. Norton).

Langlois, J. H., Kalakanis, L., Rubenstein, A. J., Larson, A., Hallam, M., and Smoot, M. 2000. „Maxims or Myths of Beauty ? A Meta-Analytic and *Theoretical Review.*" *Psychological Bulletin*, 126, 390.

Langlois, J. H., and Roggeman, L. A. 1990. „Attractive Faces Are Only *Average*." *Psychological Science*, 1,115.

Langlois, J. H., Roggman, L. A., and Musselman, L. 1994. „What Is Average and What Is Not Average About Attractive Faces ?" *Psychological Science*, 5(4), 214.

Langlois J. H., Roggman, L. A., and Reiser-Danner, L. A. 1990. „Infants' Differential Social Responses to Attractive and Unattractive Faces." *Developmental Psychology*, 26, 153.

Laudal, O. A., and Piene, R., eds. 2004. *The Legacy of Niels Henrik Abel: The Abel Bicentennial, Oslo, June 3–8, 2002* (Berlin: Springer).

Lederman, L., with Tersei, D. 1993. *The God Particle* (Boston: Houghton Mifflin). Lederman, L. M., and Hill, C. T. 2004. *Symmetry and the Beautiful Universe* (Amherst, NY: Prometheus).

LeDoux, J. E. 1996. *The Emotional Brain* (New York: Simon & Schuster). Leeuwenberg, E. L. J. 1971. „A Perceptual Coding Language for Visual and Auditory Patterns." *American Journal of Psychology,* 84(3), 307.

Levey, M. 1954. „Abraham Savasorda and His Algorism: A Study in Early European Logistic." *Osiris*, 11, 50.

Lévi-Strauss, C. 1949. *The Elementary Structure of Kinship.* Republished in 1971 (Boston: Beacon Press).

Lévi-Strauss, C. 1958. *Structural Anthropology.* Republished in 1974 (New York: Basic Books). Levy, S. „I Found Einstein's Brain." http://www.echonyc.com/~steven/einstein.html/.

Lewin, D. 1993. *Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays* (New Haven: Yale University Press).

Lindley, D. 1996. *Where Does the Weirdness Go?* (New York: Basic Books).

Liouville, J., ed. 1846. „Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois." *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11, 381.

Lipkin, H. J. 2002. *Lie Groups for Pedestrians* (Mineola, NY: Dover Publications).

Livio, M. 2000. *The Accelerating Universe: Infinite Expansion, the Cosmological Constant, and the Beauty of the Cosmos* (New York: Wiley).

Livio, M. 2002. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number* (New York: Broadway Books).

Loeb, A. L. 1971. *Color and Symmetry* (New York: John Wiley & Sons).

Loftus, M. J. 2001. „The Rorschach Inkblot Test." *Emory Magazine*, vol. 77, number 2.

Lombroso, C. 1895. *The Man of Genius* (London: Charles Scribner's Sons).

Ludwig, A. M. 1995. *The Price of Greatness: Resolving the Creativity and Madness Controversy* (New York: Guilford Press).

Lyytinen, A., Brakefield, P. M., and Mappes, J. 2003. „Significance of Butterfly Eyespots as an Anti-Predator Device in Ground-Based and Aerial Attacks." *Oikos*, 100, 373.

MacCarthy, F. 1995. *William Morris: A Life for Our Time* (London: Faber and Faber).

MacGillavry, C. H. 1976. *Fantasy & Symmetry: The Periodic Drawings of M. C. Escher* (New York: Harry N. Abrams).
Mach, E. 1914. *The Analysis of Sensation* (Chicago: Open Court); republished in 1959 by Dover (New York).
MacKinnon, D. W. 1975. „IPAR's Contribution to the Conceptualization and Study of Creativity," in *Perspectives in Creativity*, I. Taylor and J. W. Getzels, eds. (Chicago: Aldine Publishing).
Maher, J., and Groves, J. 1996. *Introducing Chomsky* (Cambridge, England: Icon Books).
Malkin, I. 1963. „On the 150th Anniversary of the Birth Date of an Immortal in Mathematics." *Scripta Mathematica*, 26, 197.
Maor, E. 1994. *e: The Story of a Number* (Princeton: Princeton University Press).
Marr, D. 1982. *Vision* (New York: W. H. Freeman).
Maxwell, E. A. 1965. *Gateway to Abstract Algebra* (Cambridge: Cambridge University Press).
Mayer, O. 1982. „János Bolyai's Life and Work," in *Proceedings of the National Colloquium on Geometry and Topology* (Napoca, Romania: Cluj-Napoca Technical University Press).
McWeeny, R. 2002. *Symmetry: An Introduction to Group Theory and Its Applications* (Mineola, NY: Dover).
Mendola, J. D., Dale, A. M., Fischel, B., Liu, A. K., and Tootell, R. B. H. 1999. „The Representation of Illusory and Real Contours in Human Cortical Visual Areas Revealed by fMRI." *Journal of Neuroscience*, 19, 8560.
Menz, C. 2003. *Morris & Co.* (Adelaide, Australia: Art Gallery of South Australia).
Mezrich, B. 2002. *Bringing Down the House* (New York: Free Press).
Miller, A. I. 1996. *Insights of Genius: Imagery and Creativity in Science and Art* (New York: Copernicus).
Miller, A. I. 2001. *Einstein, Picasso* (New York: Perseus Books).
Miller, G. F. 2000. *The Mating Mind* (New York: Doubleday).
Misner, C. W, Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. 1973. *Gravitation* (San Francisco: W. H. Freeman).
Mittag-Leffler, G. 1904. „Niels Henrik Abel." *Ord Och Bild*, 12, 65, and 129.
Mittag-Leffler, G. 1907. „Niels Henrik Abel." *Revue du Mois* (Paris), 4, 5, and 207.

Møller, A. P. 1992. „Female Swallow Preference for Symmetrical Male Sexual Ornaments." *Nature*, 357, 238.

Møller, A. P. 1994. *Sexual Selection and the Barn Swallow* (Oxford: Oxford University Press).

Møller, A. P., and Swaddle, J. P. 1997. *Asymmetry, Developmental Stability and Evolution* (Oxford: Oxford University Press).

Molnar, V., and Molnar, F. 1986. „Symmetry-Making and -Breaking in Visual Art." *Computers and Mathematics with Applications*, 12B, Nos. 1–2, 291-301.

Mondor, H. 1954. „L'étrange rencontre de Nerval et de Galois." *Arts*, 7 Juillet.

Mosotti, A. 1972. In *Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Motte, A. 1995, trans. *The Principia* (Amherst, NY: Prometheus Books). Newton's 1686 masterpiece was translated by Andrew Motte in 1729.

Mozart, W. A., et al. 1966. *The Letters of Mozart and His Family,* vol. 1, 2nd edition, Emily Anderson, trans. (London: Macmillan), p. 130, p. 137.

Mozzochi, C. J. 2004. *The Fermat Proof* (Victoria, Canada: Trafford Publishing).

Mumford, D., Series, C., and Wright, D. 2002. *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein* (Cambridge: Cambridge University Press).

N. E. Thing Enterprises. 1995. *Magic Eye Gallery: A Showing of 88 Images* (Kansas City: Andrews & McMeel).

Nagy, D. 1995. „The 2,500-Year-Old Term Symmetry in Science and Art and Its 'Missing Link' Between the Antiquity and the Modern Age." *Symmetry: Culture and Science*, 6, 18.

Newman, J. R. 1956. „The Rhind Papyrus," in *The World of Mathematics*, J. R. Newman, ed. (New York: Simon & Schuster).

Noether's theorem. http://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27s_theorem/.

Nový, L. 1973. *Origins of Modern Algebra* (Prague: Academia).

O'Connor, J. J, and Robertson, E. F. 1996a. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Bring.html/.

O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1996b. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Galois.html/.

O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1996c. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Germain.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1996d. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Cayley.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1996e. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1997. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Tschirnhaus.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1998. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Euler.html.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1999a. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Al-Khwarizmi.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 1999b. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Abraham.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 2000a. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Babylonian_mathematics.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 2000b. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_mathematics.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 2000c. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_papyri.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 2000d. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Matbematicians/Gregory.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 2001a. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Bezout.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 2001 b. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Birkhoff.html/.
O'Connor, J. J., and Robertson, E. F. 2002. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Lie.html/.
Odifreddi, P. 2004. *The Mathematical Century: The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years* (Princeton: Princeton University Press).
Olson, S. 2004. *Count Down* (Boston: Houghton Mifflin).
Ore, O. 1953. *Cardano, the Gambling Scholar* (Princeton: Princeton University Press).
Ore, O. 1954. Me/5 *Henrik Abel: Et geni og hans Samtid* (Oslo: Gyldendal Norsk Forlag). Translated into English in 1957 as *Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary* (Minneapolis: University of Minnesota Press).

Ore, O. 1972. *In Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Osborne, H. 1952. *Theory of Beauty: An Introduction to Aesthetics* (London: Routledge & Kegan Paul).

Osborne, H. 1986. „Symmetry as an Aesthetic Factor." *Computers & Mathematics with Applications,* 12B, Nos. 1–2, 77.

Osen, L. M. 1974. *Women in Mathematics* (Cambridge, MA: MIT Press).

Overbye, D. 2000. *Einstein in Love: A Scientific Romance* (New York: Viking). *Oxford English Dictionary.* 1978 (Oxford: Oxford University Press).

Pagán Westphal, S. 2003. „Decoding the Ys and Wherefores of Males." *New Scientist*, *21* June, 15.

Pais, A. 1982. *Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein* (New York: Oxford University Press).

Palmer, A. R. 1994. „Fluctuating Asymmetry Analysis: A Primer," in *Developmental Instability: Its Origins and Evolutionary Implications*, T. A. Markow, ed. (Dordrecht, The Netherlands: Kluwer), 335.

Palmer, S. E. 1991. „Goodness, Gestalt, Groups, and Garner: Local Symmetry Subgroups as a Theory of Figurai Goodness," in *The Perception of Structure: Essays in Honor of Wendell R, Garner*, G. R. Lockhead and J. R. ; Pomerantz, eds. (Washington, DC: American Psychological Association), 23.

Palmer, S. E. 1999. *Vision Science* (Cambridge, MA: MIT Press).

Palmer, S. E., and Hemenway, K. 1978. „Orientation and Symmetry: Effects of Multiple, Rotational, and Near Symmetries. „*Journal of Experimental Psychology*, 4(4), 691–702.

Paraskevopoulos, I. 1968. „Symmetry, Recall, and Preference in Relation to Chronological Age." *Journal of Experimental Child Psychology*, 6, 254-264.

Parry, L., ed. 1996. *William Morris* (New York: Harry N. Abrams).

Pascal, A. 1914. „Girolamo Saccheri Nella Vita e Nelle Opere." *Giornale di Matematica di Battaglini*, 52, 229.

Paterniti, M. 2000. *Driving Mr. Albert: A Trip Across America with Einstein's Brain* (New York: Dial Press).

Patterson, E. M., and Rutherford, D. E. 1965. *Elementary Abstract Algebra* (Edinburgh: Oliver and Boyd).

Pennisi, E. 2004. „Speaking in Tongues." *Science,* 303,1321.
Penrose, R. 2004. *The Road to Reality* (London: Jonathan Cape).
Perrett, D. I., May, K. A., and Yoshikawa, S. 1994. „Facial Shape and Judgements of Female Attractiveness." *Nature*, 368, 239.
Perrett, D. I., Penton-Voak, I. S., Little, A. C., Tiddeman, B. P., Burt, D. M., Schmidt, N., Oxley, R., and Barrett, L. 2002. „Facial Attractiveness Judgements Reflect Learning of Parental Age Characteristics." *Proceedings of the Royal Society of London B*, 269 (1494), 873.
Pesic, P. 2003. *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability* (Cambridge, MA: The MIT Press).
Peterson, I. 2000. „Completing Latin Squares." *Science News Online*, 157, No. 19, http://www.sciencenews.org/20000506/mathtrek.asp.
Peterson, I. 2004. „Heads or Tails?" *Science News*, February 28.
Petsinis, T. 1988. *The French Mathematician* (New York: Walker & Company).
Picard, E., ed. 1897. *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois* (Reprinted in 1951, Paris: Gauthier-Villars).
Pickover, C. A. 2001. *Wonders of Numbers* (Oxford: Oxford University Press).
Pinker, S. 1994. *The Language Instinct* (New York: Morrow).
Pinker, S. 1997. *How the Mind Works* (New York: W. W. Norton & Company).
Portnoy, E. 1982. „Riemann's Contribution to Differential Geometry." *His-toria Mathematica,* 9(1), 1.
Putz, J. F. 1995. „The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart." *Mathematics Magazine,* 68, 275-282.
Rahn, J. 1980. *Basic Atonal Theory* (New York: Schirmer Music Books).
Raspail, F.-V. 1839. *Réforme pénitentiaire: Lettres sur les prisons de Paris* (Paris: Tamisey et Champion).
Rees, M. 1997. *Before the Beginning* (Reading, MA: Helix Books).
Revue encyclopédique, t. 55, 568, Septembre 1832.
Ridley, M. 2003. *The Red Queen* (New York: Perennial); originally published in 1993 by Penguin (London).
Rikowski, A., and Grammer, K. 1999. „Human Body Odour, Symmetry and Attractiveness." *Proceedings of the Royal Society of London B*, 266, 869.

Ritter, F. 1895. „FranÎois Viète, inventeur de l'algèbre moderne, 1540-1603. Essai sur sa vie et son oeuvre." *Revue Occidentale Philosophique Sociale et Politique*, 10, 234; 354.

Rock, I. 1973. *Orientation and Form* (New York: Academic Press).

Rose, P. L. 1975. *The Italian Renaissance of Mathematics* (Genève: Librairie Droz).

Rosen, J. 1975. *Symmetry Discovered: Concepts and Applications in Nature and Science* (Cambridge: Cambridge University Press).

Rosen, J. 1995. *Symmetry in Science: An Introduction to the General Theory* (New York: Springer-Verlag).

Rosen, M. I. 1995. „Niels Henrik Abel and Equations of the Fifth Degree." *American Mathematical Monthly*, 102, 495.

Rosenbaum, D. E. 1970. „Statisticians Charge Draft Lottery Was Not Random." *New York Times*, Jan. 4, 1970.

Rossi, B., and Hall, D. B. 1941. „Variation of the Rite of Decay of Mesotrons with Momentum." *Physical Review*, 59, 223.

Rothenberg, A., and Hausman, C. R., eds. 1976. *The Creativity Question* (Durham: Duke University Press).

Rothman, T. 1982a. „Genius and Biographers: The Fictionalization of Évariste Galois." *The American Mathematical Monthly,* 89, 2, 84; revised at: http://godel.ph.utexas.edu/~tonyr/galois.html/.

Rothman, T. 1982b. „The Short Life of Évariste Galois." *Scientific American,* 246, 4, 136.

Rotman, J. 1990. *Galois Theory* (New York: Springer-Verlag).

Rotman, J. J. 1995. *An Introduction to the Theory of Groups* (New York: Springer-Verlag).

Rozen, S., Skaletsky, H., Marszalek, J. D., Minx, P. J., Cordam, H. S., Water-ston, R. H, Wilson, R. K., and Page, D. C. 2003. „Abundant Gene Conversion between Arms of Palindromes in Human and Ape Y Chromosomes." *Nature,* 423, 873.

Rubik, E., Varga, T., Kéri, G., Marx, G., and Vekerdy, T. 1987. *Rubik's Cubic Compendium* (Oxford: Oxford University Press).

Sabbagh, K. 2003. *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics* (New York: Farrar, Straus & Giroux).

Sampson, J. H. 1990-1991. „Sophie Germain and the Theory of Numbers." *Archive for History of Exact Science*, 41, 157.

Sarton, G. 1921. „Evariste Galois." *The Scientific Monthly*, 13, 363; reprinted in 1937, Osz'n's, 3,241.

Sartre, J.-P. 1964. *Les Mots* (Paris: Gallimard).
Schaal, B., and Porter, R. H. 1991. „Microsmatic Humans Revisited: The Generation and Perception of Chemical Signals." *Advances in the Study of Behavior*, 20, 474.
Schattschneider, D. 2004. *M. C. Escher: Visions of Symmetry* (New York: Harry N. Abrams).
Schoenberg, A. 1969. *Structural Functions of Harmony* (New York: W. W. Norton).
Scholz, E. 1992. „Riemann's Vision of a New Approach to Geometry," in *1830–1930: A Century of Geometry*, L. Boi, D. Flament, and J. M. Sal-anskis, eds. (Berlin: Springer-Verlag), 22.
Schultz, P. 1984. „Tartaglia, Archimedes and Cubic Equations." *Gazette Australian Mathematical Society*, 11 (4), 81.
Schwarz, C. 2002. *Tales from the Subatomic Zoo* (Staatsburg, NY: Small World Books; www.smallworldbooks.net).
Schwarz, P. M., and Schwarz, J. H. 2004. *Special Relativity: From Einstein to Strings* (Cambridge: Cambridge University Press).
Schweitzer, A. 1967./. *S. Bach* (vol. 1) (Mineola, NY: Dover Publications).
Shackelford, T. K., and Larsen, R. J. 1997. „Facial Asymmetry as Indicator of Psychological, Emotional, and Physiological *Distress.*" *Journal of Personality and Social Psychology*, 72, 456.
Shubnikov, A. V., and Koptsik, V. A. 1974. *Symmetry in Science and Art* (New York: Plenum Press).
Shurman, J. 1997. *Geometry of the Quintic* (New York: John Wiley & Sons).
Silk, J. 2000. *The Big Bang,* 3rd ed. (New York: Times Books).
Simonton, D. K. 1999. *Origins of Genius* (New York: Oxford University Press).
Singh, D. 1993. „Adaptive Significance of Female Physical Attractiveness: Role of Waist-to-Hip Ratio." *Journal of Personality and Social Psychology*, 65, 293.
Singh, D. 1995. „Female Health, Attractiveness, and Desirability for Relationships: Role of Breast Asymmetry and Waist-to-Hip Ratio." *Ethology and Sociobiology*, 16, 465.
Singh, S. 1997. *Fermat's Enigma* (New York: Anchor Books).

Skaletsky, H., et al. 2003. „The Male-Specific Region of the Human Y Chromosome Is a Mosaic of Discrete Sequence Classics." *Nature,* 423, 825.

Smith, D. K. 1997. „Mathematics, marriage and finding somewhere to eat." http://www.pass.maths.org.uk/issue3/marriage/index.html/.

Smith, T. A. 1996. http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/musoffcanons.html.

Smolin, L. 2002. *Three Roads to Quantum Gravity* (New York: Perseus Books).

Solomon, R. 1995. „On Finite Simple Groups and Their Classification." *Notices of the AMS*, 42(2), 231.

Sommerville, D. Y 1960. *Bibliography of Non-Euclidean Geometry,* 2nd ed. (New York: Chelsea).

Spearman, B. K., and Williams, K. S. 1994. „Characterization of Solvable Quintics $x^5 + ax + b$." *American Mathematical Monthly,* 101, 986.

Stachel, J., ed. 1989. *The Collected Papers of Albert Einstein,* vols. 1 and 2 (Princeton: Princeton University Press).

Starr, N. 1997. „Nonrandom Risk: The 1970 Draft *Lottery." Journal of Statistical Education*, 5, no. 2.

Steiner, G. 2001. *Grammars of Creation* (London: Faber and Faber).

Sternberg, R. J., ed. 1998. *Handbook of Creativity* (Cambridge: Cambridge University Press).

Stevens, P. S. 1996. *Handbook of Regular Patterns* (Cambridge, MA: The MIT Press).

Stewart, I. 1995. *Concepts of Modern Mathematics* (Mmeola, NY: Dover).

Stewart, I. 2001. *What Shape Is a Snowflake?* (New York: W. H. Freeman).

Stewart, I. 2004. *Galois Theory* (Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC).

Stewart, I., and Golubitsky, M. 1992. *Fearful Symmetry: Is God a Geometer?* (Oxford: Blackwell).

Stubhaug, A. 2000. *Niels Henrik Abel and His Times: Called Too Soon by Flames Afar* (Berlin: Springer). This is a translation of the 1996 Norwegian *Et foranskutt lyn, Niels Henrik Abel og bans tid* (Oslo: H. Aschehoug & Co.).

Stubhaug, A. 2002. *The Mathematician Sophus Lie* (Berlin: Springer-Verlag).

Swaddle, J. P., and Cuthill, I. C. 1994. „Preference for Symmetric Males by Female Zebra Finches." *Nature*, 367, 165.

Sylow, L., and Lie, S., eds. 1881. *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel* (Christiania: Grondahl & Son); reprinted in 1965 by Johnson Reprint (New York).

Szénássy, B. 1992. *History of Mathematics in Hungary Until the 20th Century* (Berlin: Springer-Verlag).

Szilagyi, P. G., and Baird, J. C. 1977. „A Quantitative Approach to the Study of Visual Symmetry." *Perception & Psychophysics*, 22(3), 287.

Tannery, J., ed. 1906. „Manuscrits et papiers inédits de Galois." *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2nd ser., 30, 246, and 255.

Tannery, J., ed. 1907. „Manuscrits et papiers inédits de Galois." *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2nd ser., 31, 275.

Tannery, J., ed. 1908. *Manuscrits de Évariste Galois* (Paris: Gauthier-Villars).

Tannery, J. 1909. „Discours Prononcé à Bourg-La-Reine." *Bulletin des Sciences mathématiques*, année 19, 1.

Tarr, M. J., and Pinker, S. 1989. „Mental Rotation and Orientation-Dependence in Shape Recognition." *Cognitive Psychology*, 21, 233.

Taton, R. 1947. „Les Relations de Galois avec les mathématiciens de son temps." *Revue d'histoire des sciences*, 1, 114.

Taton, R. 1971. „Sur les relations scientifiques d'Augustin Cauchy et d'Evariste Galois." *Revue d'histoire des sciences*, 24, 123.

Taton, R. 1972. „Évariste Galois," in *Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Taton, R. 1983. „Évariste Galois and His Contemporaries." *Bulletin of London Mathematical Society*, 15, 107.

Taylor, R. E. 1942. *No Royal Road* (Chapel Hill: University of North Carolina Press).

Terquem, O. 1849. „Biographie. Richard, Professeur." *Nouvelles annales de mathématiques*, 8, 448.

Thomas, R. 2001. „And the Winner Is..." *Plus*, 16 (news) http://plus.maths.org/.

Thornhill, R., and Gangestad, S. W. 1996. „The Evolution of Human Sexuality." *Trends in Ecology and Evolution*, 11, 98.

Thornhill, R., Gangestad, S. W, and Comer, R. 1995. „Human Female Orgasm and Mate Fluctuating Asymmetry." *Animal Behaviour*, 50, 1601.

Thornhill, R., Gangestad, S. W, Miller, R., Scheyd, G., Knight, J., and Franklin, M. 2003. „MHC, Symmetry, and Body Scent Attractiveness in Men and Women." *Behavioral Ecology*, 14, 668.

Thornhill, R., and Grammer, K. 1999. „The Body and Face of a Woman: One Ornament That Signals Quality? „ *Evolution and Human Behavior*, 20, 105.

Tignol, J.-P. 2001. *Galois' Theory of Algebraic Equations* (Singapore: World Scientific).

Tooby, J., and Cosmides, L. 1990. „On the Universality of Human Nature and the Uniqueness of the Individual: The Role of Genetics and Adaptation." *Journal of Personality*, 58, 17.

Tootell, R. B. H., Mendola, J. D., Hadjikhani, N. K., Liu, A. K., and Dale, A. M. 1998. „The representation of the ipsilateral visual field in the human cerebral cortex." *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 95, 818.

Toti Rigatelli, L. 1996. *Évariste Galois 1811–1832* (Basel: Birkhäuser Verlag).

Tovey, D. F. 1957. *The Forms of Music* (New York: Meridian Books).

Trudeau, R. J. 1987. *The Non-Euclidean Revolution* (Boston: Birkhäuser).

Turnbull, H. W. 1993. *The Great Mathematicians* (New York: Barnes & Noble Books).

Tyler, C. W. 1983. „Sensory Processing of Binocular Disparity," in *Vergence Eye Movements: Basic and Clinical Aspects*, C. M. Schor and K. J. Ciuf-freda, eds. (London: Butterworths).

Tyler, C. W. 1995. „Cyclopean Riches: Cooperativity, Neurontropy, Hysteresis, Stereoattention, Hyperglobality, and Hypercyclopean Processes in Random-Dot Stereopsis," in *Early Vision and Beyond,* T. V. Popathomas, C. Chubb, A. Gorea, and E. Kowler, eds. (Cambridge, MA: MIT Press).

Tyler, C. W, ed. 2002. *Human Symmetry Perception and Its Computational Analysis* (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.).

Tyson, N. D. G., and Goldsmith, D. 2004. *Origins: Fourteen Billion Years of Cosmic Evolution* (New York: W. W Norton).

van der Helm, P. A., and Leeuwenberg, E. L. 1991. „Accessibility: A Criterion for Regularity and Hierarchy in Visual Pattern *Codes.*" *Journal of Mathematical Psychology*, 35(2), 151.

van der Woerden, B. L. 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (Berlin: Springer-Verlag).

van der Woerden, B. L. 1985. *A History of Algebra* (Berlin: Springer-Verlag).

Verdier, N. 2003. „Évariste Galois, Le Mathématicien Maudit." *Pour la Science*, no. 14, 1.

Verriest, G. 1934. *Évariste Galois et la Théorie des Équations Algébriques* (Lonvain: Chez L'Auteur).

Vitruvius. Ca. 27 BC. *De Architectura*, III, I, translated in 1914 by M. H. Morgan; reprinted 1960 by Dover Publications (New York).

Vogel, K. 1972. *In Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Vucinich, A. 1962. „Nicolai Ivanovich Lobachevskii: The Man behind the First Non-Euclidean Geometry." *Isis*, 53, 465.

Walser, H. 2000. *Symmetry* (Washington, DC: The Mathematical Association of America).

Washburn, D. K., and Crowe, D. W 1988. *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis* (Seattle: University of Washington Press).

Webb, S. 2004. *Out of This World* (New York: Copernicus Books).

Weinberg, S. 1992. *Dreams of a Final Theory* (New York: Pantheon Books).

Wells, D. 1997. *Curious and Interesting Mathematics* (London: Penguin Books).

Wertheimer, M. 1912. „Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung." *Zeitschrift für Psychologie,* 61, 161.

Weyl, H. 1935. „Emmy Noether." *Scripta Mathematica*, 3, 201.

Weyl, H. 1952. *Symmetry* (Princeton: Princeton University Press).

Wheatstone, C. 1838. „Contributions to the Physiology of Vision. Part the First. On some remarkable, and hitherto unobserved, Phenomena of Binocular Vision." *Philosophical Transactions of the Royal Society, Part 1*, 371 (reprinted in *The Scientific Papers of Sir Charles Wheatstone,* London, 1879, p. 225).

Wheeler, J. A. 1990. *A Journey into Gravity and Spacetime* (New York: Scientific American Library).
Whistler, J. M. 1890. „The Gentle Art of Making Enemies." *Propositions*, 2.
Whiteside, D. T. 1972. In *Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).
Wilde, O. 1892. *Lady Windermere's Fan*, act III.
Willard, H. F. 2003. „Tales of the Y Chromosome." *Nature*, 423, 810.
Wilson, D. 1986. „Symmetry and Its 'Love-Hate' Role in Music." *Computers & Mathematics with Applications*, 12B, nos. 1–2, 101.
Wilson, E. B. 1945. „Obituary: George David Birkhoff." *Science (NS),* 102, 578.
Winchel, F. 1967. *Music, Sound and Sensation* (New York: Dover).
Winner, E. 1996. *Gifted Children: Myths and Realities* (New York: Basic Books).
Witelson, S. F., Kigar, D. L., and Harvey, T. 1999. „The Exceptional Brain of Albert Einstein." *The Lancet,* 353, 2149.
Witten, E. 2004a. „Universe on a String." In *Origin and Fate of the Universe* (special cosmology issue of *Astronomy*).
Witten, E. 2004b. „When Symmetry Breaks Down." *Nature*, 429, 507.
Wolff, C. 2001. *Johann Sebastian Bach: The Learned Musician* (New York: W. W. Norton & Company).
Wolfram, S. 2002. *A New Kind of Science* (Champaign, IL: Wolfram Media), 873.
Wood, J. M., Nezworski, M. T., Lilienfeld, S. O., and Garb, H. N. 2003. *What's Wrong with the Rorschach?* (San Francisco: Jossey-Bass).
Wussing, H. 1984. *The Genesis of the Abstract Group Concept* (Cambridge, MA: The MIT Press).
Yaglom, I. M. 1988. *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century* (Boston: Birkhauser).
Yardley, P. D. 1990. „Graphical Solution of the Cubic Equation Developed from the Work of Omar Khayyam." *Bull. Inst. Math. Appl*, 26, 5/6, 122.
Youschkevitch, A. P. 1972a. *Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Youschkevitch, A. P. 1972b. In *Dictionary of Scientific Biography,* C. C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Zahavi, A. 1975. „Mate Selection: A Selection for the Handicap." *Journal of Theoretical Biology*, 53, 205.

Zahavi, A. 1991. „On the Definition of Sexual Selection, Fisher's Model, and the Evolution of Waste and of Signals in General." *Animal Behavior*, 42(3), 501.

Zahavi, A., and Zahavi, A. 1997. *The Handicap Principle: A Missing Piece of Darwin's Puzzle* (Oxford: Oxford University Press).

Zee, A. 1986. *Fearful Symmetry: The Search for Beauty in Modern Physics* (New York: Macmillan Publishing Company).

Zund, J. D. 1983. „Some Comments on Riemann's Contributions to Differential Geometry." *Historia Mathematica*, 10(1), 84.

Zweibach, B. 2004. *First Course in String Theory* (Cambridge: Cambridge University Press).

Mulțumiri

Autorul și editorul mulțumesc pentru permisiunea de retipărire a următoarelor materiale:

IMAGINI

Fig. 1, 3, 6-9, 12-15, 18-25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 74-77, 79-82, 84, 87, 89, 90, 92, 96, 98, 100-105, și figurile din Anexele 1 și 10 de: Krista Wildt.

Fig. 2: Alinari/Art Resource, NY; Uffizi, Florence, Italy.

Fig. 4, 5, 25: de Ann Feild.

Fig. 10a: Prin bunăvoința lui Ricardo Villa-Real. Detaliu din *The Alhambra and the Generalife* de Ricardo Villa-Real.

Fig. 10b: M. C. Escher's „Symmetry Drawing El 16 (Fish)", © 2004 The M. C. Escher Company, Baarn, Holland. All Rights Reserved.

Fig. 11a: Morris & Company, London (1861-1940), William Morris, designer (1834-1896): *Apple Wallpaper (blue),* London, realizare din 1877. Pictură în relief pe hârtie, sul de 56 cm lățime. Donație de la Haslem & Whiteway Ltd. 2002, Art Gallery of South Australia, Adelaide.

Fig. 11b: Morris & Company, London (1861-1940), William Morris, designer (1834-1896): *St. James wallpaper [fragment], 1884,* London, realizare din 1881. Pictură în relief pe hârtie, dim. nereg., aprox. 38,5 × 17,0 cm. Donație de la Scotch College, Torrens Park, Adelaide 1992, Art Gallery of South Australia, Adelaide.

Fig. 16: M. C. Escher's „Symmetry Drawing E97 (Dogs)", © 2004 The M. C. Escher Company, Baarn, Holland. All Rights Reserved.

Fig. 17: Prin bunăvoința lui Thomas M. Brown, NASA și ESA.

Fig. 29: © 2004 Magic Eye Inc./www.magiceye.com/.

Fig. 31 : © 2005 Bridget Riley, all rights reserved.

Fig. 34: Fotografie © The British Museum.

Fig. 36, 39, 40, 41, 43-6, 78, 83: „Fondo Ritratti" din Biblioteca Speciale di Matematica „Giuseppe Peano", obținute cu ajutorul Laurei Garbolino și Liviei Giacardi.

Figs. 37, 42, 49, 58, 62, 73: Gratuit; realizate de autor.

Fig. 38: B.U.B., ms. 595, N, 7, c. 30 v., Biblioteca Universitaria di Bologna.

Fig. 47, 48, 51: Prin bunăvoința lui Arild Stubhaug. Din *Niels Henrik Abel and His Times: Called Too Soon by Flames Afar,* de Arild Stubhaug.

Fig. 50, 95: Departamentul de matematică, Universitatea din Oslo, Norvegia, cu ajutorul lui Yngvar Reichelt.

Fig. 52–56, 59, 68, 70-72: Administrația orașului Bourg-la-Reine, cu ajutorul lui Philippe Chaplain. Fig. 59: Archives Nationales F17.4176.

Fig. 57, 61, 66, 69: Bibliothèque de l'Institut de France, cu ajutorul lui Norbert Verdier.

Fig. 60: Réunion des Musées Nationaux/Art Resource, NY; Louvre, Paris, France.

Fig. 63: © Photothèque des musées de la ville de Paris/Cliché: Andreani. Musée Carnavalet.

Fig. 64: Bibl. Historique de la ville de Paris, Norbert Verdier.

Fig. 65, 106: Archives de l'Académie des sciences, cu ajutorul lui Norbert Verdier.

Fig. 67: Cent ans d'assistance publique à Paris, cu ajutorul lui Norbert Verdier.

Fig. 85, 88, 93, 94: Colecția privată a Dr. Elliott Hinkes prezentată la „Celestial Harmony: Four Visions of the Universe", o expoziție de la Milton S. Eisenhower Library, Johns Hopkins University, 26 aprilie-30 mai 2004.

Fig. 86: Derby Museums și Art Gallery.

Fig. 97: De John Bedke.

Fig. 99: Adaptare cu permisiunea primită de la Forsman & Merilaita 1999.

TEXT

Anexa 5: Versurile lui Tartaglia, retipărite cu permisiunea lui Ron G. Keightley.

Anexa 8: Arborele genealogic al familiei Galois, obținut de la forul administrativ al orașului Bourg-la-Reine, cu ajutorul lui Philippe Chaplain.

Poemul „Cromodinamică" (p. 257): Retipărit cu permisiunea lui Cindy Schwarz.

S-au făcut eforturi susținute pentru contactarea deținătorilor drepturilor de autor asupra imaginilor din această carte, dar în unele cazuri nu am reușit să-i localizăm. Cei pe care nu i-am contactat sunt rugați să se adreseze la Simon & Schuster, 1230 Avenue of the Americas, New York, NY 10020.

Cuprins

1. Simetria 7
2. iițnim iihco nî eirtemiS 39
3. Să nu uitați niciodată acest lucru când vă cufundați printre ecuațiile voastre 63
4. Matematicianul chinuit de sărăcie 107
5. Matematicianul romantic 131
6. Grupurile 182
7. Regulile de simetrie 229
8. Cine-i cel mai simetric dintre toți? 270
9. Recviem pentru un geniu romantic 304

ANEXA 1. Problema ridicată de un joc de cărți 321
ANEXA 2. Rezolvarea unui sistem de două ecuații liniare 322
ANEXA 3. Soluția lui Diofant 323
ANEXA 4. O ecuație diofantică 324
ANEXA 5. Versurile și formula lui Tartaglia 325
ANEXA 6. Provocarea lui Adriaan van Roomen 328
ANEXA 7. Proprietățile rădăcinilor ecuațiilor de gradul doi 329
ANEXA 8. Arborele genealogic al lui Galois 331
ANEXA 9. Puzzle-ul 14–15 334
ANEXA 10. Soluția problemei chibriturilor 335

Note 337
Bibliografie 357
Mulțumiri 387